المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة الاستدراكية 2018

-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS	RS 25

4 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte quatre exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

Exercice 1	**Les structures algébriques**	**3,5 points**
Exercice 2	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 3	**Le calcul des probabilités**	**3 points**
Exercice 4	**L'analyse**	**10 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,.)$ est un espace Vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout couple $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,5 1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

0,5 2) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,.)$

0,25 b) Montrer que l'espace vectoriel $(E;+,.)$ est de dimension 2

0,25 3) a) Montrer que E est stable pour la loi "$\times$"

0,5 b) Montrer que $(E;+,\times)$ est un anneau commutatif

4) On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

Pour tout $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M(x,y)T\,M(x',y')=M(x,y)\times M(x',y')-M(y,0)\times M(y',0)$$

Soit φ l'application définie par :

$$\varphi:(\mathbb{C}^*,\times)\to(E,T)$$
$$x+iy\mapsto M(x,y)$$

0,25 a) Montrer que E est stable pour la loi "T"

0,25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans (E,T)

0,25 c) On pose $E^*=E\setminus\{O\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif

0,5 5) a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi "$+$" dans E

0,25 b) Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif

Exercice 2 : (3,5 points)

Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$, on pose : $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$

0,5 1) a) Montrer l'équivalence suivante : $h(z)=z\Leftrightarrow z^2-2iz-2=0$

0,5	b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2-2iz-2=0$
	2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$
	On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}(a)=1$
	Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i,a,b\}$, on note $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$ les points D'affixes respectives z, $h(z)$, a et b
0,75	a) Montrer que : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=-\dfrac{z-a}{z-b}$
0,75	b) En déduire que : $\overline{(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A})}\equiv\pi+\overline{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})}\,[2\pi]$
0,5	3) a) Montrer que si M, A et B sont alignés, alors M, A, B et M' sont alignés
0,5	b) Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés, alors M, A, B et M' sont cocycliques.

	Exercice 3 : (3 points)
	On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile » (c'est-à-dire le nombre de fois l'apparition de la face « pile » divisé par 10)
1	1) a) Déterminer les valeurs prises par X
1	b) Déterminer la probabilité de l'événement $\left(X=\dfrac{1}{2}\right)$
1	2) Quelle est la probabilité de l'événement : « X supérieure ou égale à $\dfrac{9}{10}$ »

	Exercice 4 : (10 points)
	Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et pour $x>0$; $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$
	On note $(\mathbf{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
0,5	1) a) Montrer que f est continue en 0 (On pourra remarquer que : $f(x)=\left(4x^{\frac{1}{4}}\ln(x^{\frac{1}{4}})\right)^2$)

0,75	b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu
0,75	2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement Le résultat obtenu
0,75	b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x>0$
1	c) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$, et en déduire que : $(\forall x\in]0;1]);\ 0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\dfrac{4}{e}\right)^2$
0,5	d) Tracer la courbe $(\mathbf{C})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prendra pour unité 2cm)
	3) Pour tout $x\ge0$, on pose $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$
0,5	a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$
1	b) Calculer $F'(x)$ *pour* $x\ge0$, puis en déduire le sens de variations de F sur $[0;+\infty[$.
0,75	4) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_x^1\sqrt{t}\ln t\,dt$ Pour tout $x>0$.
0,75	b) Montrer que pour tout $x>0$, $F(x)=-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x-\dfrac{16}{27}x\sqrt{x}+\dfrac{16}{27}$
1	c) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathbf{C})$ et les droites d'équations respectives $x=0,\ x=1$ *et* $y=0$
	5) Pout tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$
1	a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée et strictement monotone
0,75	b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

FIN