المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة الاستدراكية 2017

-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS	RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - (خيار فرنسية)	المعامل	9

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte quatre exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

Exercice 1	**Les structures algébriques**	**4,5 points**
Exercice 2	**Les probabilités**	**3 points**
Exercice 3	**Les nombres complexes**	**2,5 points**
Exercice 4	**L'analyse**	**10 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

On pose $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -3y\\ y & x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

et $E=\left\{M(x,y)\,/\,(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,75 1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ de dimension 2

0,5 2) a) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,75 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif

3) On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}\right);\ \varphi(x+iy)=M\left(x,\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)$

0,75 a) Vérifier que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sur $(E^*,\times)$

0,5 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif

0,75 c) Montrer que : $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\,\vec{i}\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$

0,5 4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif

Exercice 2 : (3 points)

Un sac contient $2n$ boules $(n\in\mathbb{N})$, dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul

0,75 1) Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 Points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2) On répète 5 fois le jeu précédent.

0,5 a) Calculer la probabilité de gagner 100 points

1 b) Calculer la probabilité de gagner 40 points

3) Au d'un seul jeu, on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement les valeurs (-20) si on perd, 0 si le gain est nul et $(+20)$ si on gagne.

0,5 a) Déterminer la loi de probabilité de la variable X

0,25 b) Calculer l'espérance mathématique de la variable X

<u>Exercice 3 :</u> (2,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$.

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

0,5 1)Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' Soient confondus.

0,5 2) On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectives 1 et -1. Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

0,75 3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que : si M appartient à (Δ), alors M' appartient à (Δ)

0,75 4) Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$.

Montrer que : si M appartient à (Γ), alors M' appartient à (AB).

<u>Exercice 4 :</u> (10 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right);\ f(x)=\frac{\arctan(x)}{x}$$

0,5 1) Montrer que f est continue sur l'intervalle I

0,5	2) a) Soit $x\in I$. Montrer que : $\left(\forall t\in[0,x]\right),\ \dfrac{1}{1+x^2}\le\dfrac{1}{1+t^2}\le 1$
0,5	b) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right),\ \dfrac{x}{1+x^2}\le\arctan(x)\le x$
0,75	c) Montrer que f est dérivable à droite en 0
0,5	3) a) Sachant que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.
0,25	b) Etudier les variations de f sur l'intervalle I

Partie II :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$g(0)=1 \text{ et } \left(\forall x\in]0;+\infty[\right),\ g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

0,5	1) a) Montrer que : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right),\ f(x)\le g(x)\le 1$
0,75	b) Montrer que g est dérivable à droite en 0
0,75	2) Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et que : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right),\ g'(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$
0,25	3) Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I
0,75	4) a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$ (remarquer que : $\left(\forall x\in]0;+\infty[\right),\ 0<\arctan(x)<\dfrac{\pi}{2}$)
0,5	b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$

Partie III :

0,75	1) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0;1[$
0,5	2) a) Vérifier que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right),\ 0\le 1-f(x)\le\dfrac{x^2}{1+x^2}$ (on pourra utiliser la question 2)b) Partie I)
0,75	b) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right),\ \lvert g'(x)\rvert\le\dfrac{1}{2}$

3) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_{n+1} = g(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

0,75 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

FIN