★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة الاستدراكية 2016

-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS	RS 25

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــــات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte quatre exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

Exercice 1	**Calcul des probabilités**	**3 points**
Exercice 2	**Les structures algébriques**	**3,5 points**
Exercice 3	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 4	**L'analyse 1**	**6,5 points**
Exercice 5	**L'analyse 2**	**3,5 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (3 points)

On a deux boites U et V. La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.

La boite V contient deux boules rouges et 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U, si elle est Rouge on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V, si Elle est bleue on la pose de côté, puis on tire une boule de la boite V.

Soient les événements suivants : R_U « la boule tirée de la boite U est rouge »

B_U « la boule tirée de la boite U est bleue »

R_V « la boule tirée de la boite V est rouge »

B_V »la boule tirée de la boite V est bleue »

0,5 1)Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U

0,5 2) a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé

0,5 b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé

1 3) Montrer que la probabilité de l'événement B_V est égale à $\dfrac{13}{21}$

0,5 4) En déduire la probabilité de l'événement R_V

Exercice 2 : (3,5 points)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $\left(\mathbb{C},+,\times\right)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\left\{M(z)\,/\,z\in\mathbb{C}\right\}$

1 1) On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall z\in\mathbb{C})(\forall z'\in\mathbb{C}),\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif

2) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & E \\ z & \mapsto & M(z) \end{array}$

1 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

0,5 b) En déduire que $(E\setminus\{M(0)\},\times)$ est un groupe commutatif

1 3) Montrer que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif

Exercice 3 : (3,5 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E) :\ z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)z+4i=0$$

0,5 1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $D=\left[\left(\sqrt{3}-\right)(1-i)\right]^2$

1 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$

0,75 a) Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z=\dfrac{1}{2}a\,\overline{z}$ est une droite qui passe par le point B.

0,5 b) Soients M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z'=a\overline{z}-b$ et $z\neq b$.

Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\dfrac{2}{|z-b|^2}$

0,75 c) En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

Exercice 4 : (6,5 points)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\ln(x)-\frac{n}{x}$$

et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,75 1) a) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n)

0,75 b) Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0,+\infty[$, puis donner son tableau de variation

0,5 c) Construire (C_2)

0,5 2) Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

0,5 3) a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, il existe un Unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

0,5 b) Comparer $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$ pour tout x *de* $]0,+\infty[$

0,5 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante

0,5 4) a) Montrer que : $(\forall x>0),\ \ln(x)<x$

0,5 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$

5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n=\frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx$$

0,5 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists c_n\in[\alpha_n,\alpha_{n+1}]) : I_n=f_n(c_n)$

0,5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ 0\leq I_n\leq\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

0,5 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

<u>Exercice 5</u> : (3,5 points)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n,+\infty[$ par : $g_n(x)=\displaystyle\int_n^x \frac{1}{\ln t}dt$

0,5 1) a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n,+\infty[$, puis déterminer sa fonction dérivée première g'_n

0,25	b) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur $[n,+\infty[$
0,5	2) a) Montrer que : $(\forall x \geq n),\ g_n(x) \geq \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$
	(On pourra utiliser l'inégalité : $(\forall t > 0),\ \ln(1+t) \leq t$)
0,25	b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$
0,25	3) a) Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n,+\infty[$ dans l'intervalle $[0,+\infty[$
0,5	b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)(\exists! u_n \geq n) : \displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$
	4) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3)b)
0,5	a) Montrer que : $(\forall n \geq 2),\ \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t}\,dt$
0,5	b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante
0,25	c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN