3 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــــــات	المادة
7	المعامل	العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIOS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Limites, dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

Exercice 1 :(4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 1) Calculer u_1

0,5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

1 3) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

Puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0,5 b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

1 b) Déterminer v_n en fonction de n, et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 2 :(5 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z + 16 = 0$$

0,5 a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

1 b) En déduire les solutions de l'équation (E)

2) Soient les nombres complexes $a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

0,75 a) Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$

0,5 b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

0,5 c) En déduire que : $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,

on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.

	Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$
0,5	a) Vérifier que $z'=\frac{1}{4}az$
0,25	b) Déterminer l'image du point C par la rotation R
0,25	c) Déterminer la nature du triangle OBC
0,75	d) Montrer que $a^4=128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés
	Exercice 3 :(4 points)
	On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$
0,5	1) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$
0,5	b) Montrer que g est croissante sur $[1,+\infty[$
0,5	c) En déduire que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\leq \ln x\leq 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$)
1	d) Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\leq \frac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$
0,75	2) a) Montrer que la fonction $G:x\mapsto x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$
0,75	b) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x)dx$
	Problème :(7 points)
	On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-3}-4\right)$$
	On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ **(unité :2cm)**
0,5	1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
0,5	2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x+\frac{5}{2}$ est une asymptotique à la

	courbe (C) au voisinage de $-\infty$
0,75	b) Résoudre l'équation $e^{x-2}-4=0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty,2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4,+\infty[$
0,5	3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter géométriquement le résultat
0,5	4) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$
0,25	b) Dresser le tableau de variations de la fonction f
0,75	5) Calculer $f''(x)$ pour tout réel x, puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
0,5	6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$
1	7) Construire (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (on prend $\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln 3\simeq 1,1$)
0,5	8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
0,75	b) Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)
0,5	c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$)

FIN