| | |
|---|---|
| المملكة المغربية<br>وزارة التربية الوطنية<br>و التعليم الأولي و الرياضة<br>المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا<br>المسالك الدولية<br>الدورة العادية 2018<br>-الموضوع-<br>SSSSSSSSS-SS    RS 24F |

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيـــــــــــــــــــــــات | مدة الإنجاز | 4 ساعات |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - ( خيار فرنسية) | المعامل | 9 |

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte cinq exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**



| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 1** | **Les structures algébriques** | **3,5 points** |
| **Exercice 2** | **L'arithmétique** | **3 points** |
| **Exercice 3** | **Les nombres complexes** | **3,5 points** |
| **Exercice 4** | **L'analyse** | **7,5 points** |
| **Exercice 5** | **L'analyse** | **2,5 points** |

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**
**L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé**

**Exercice 1 : (3,5 points)**

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,.)$ est un espace vectoriel.

Pour tout couple $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -2y\\ y & x+2y\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,25 1) Montrer que $E$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

0,25 2) a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+,.)$

0,5 b) On pose $J=M(0,1)$. Montrer que $(I,J)$ est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$

0,5 3) a) Montrer que $E$ est stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

0,5 b) Montrer que $(E;+,\times)$ est un anneau commutatif

4) Soit $\varphi$ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}\right);\ \varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y & 2y\\ -y & x-y\end{pmatrix}$$

0,5 a) Montrer que $\varphi$ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

0,5 b) On pose $E^*=E\setminus\{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

0,25 c) En déduire que $(E^*,T)$ est un groupe commutatif

0,25 5) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif

**Exercice 2 : (3 points)**

Soit $p$ un nombre premier tel que : $p=3+4k\ (k\in\mathbb{N}^*)$

0,5 1)Montrer que pour tout entier relatif $x$, si $x^2\equiv1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv1[p]$

| | |
|---|---|
| | 2) Soit $x$ un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1\,[p]$ |
| 0,5 | a) Montrer que $x$ et $p$ sont premiers entre eux |
| 0,5 | b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1\,[p]$ |
| 0,5 | c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$ |
| 0,5 | d) En déduire que : $x^2 \equiv 1\,[p]$ |
| 0,5 | 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1\,[67]$ |

**Exercice 3 : (3,5 points)**

Soit $m$ un nombre complexe.

**I-** On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ :

$$(E_m) : z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$

0,25 1) a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation $(E_m)$

0,5 b) Donner, suivant les valeurs de $m$, l'ensemble des solutions de $(E_m)$

0,5 2) Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation $(E_m)$ sous la forme Exponentielle.

**II-** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A, \Omega, M$ et $M'$ d'affixes respectives $a=-1-i$, $\omega=i$, $m$ et $m'=-im-1+i$.

1) Soit $R$ la rotation d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme $M$ en $M'$

0,25 a) Vérifier que $\Omega$ est le centre de la rotation $R$

0,5 b) Déterminer l'affixe $b$ du point $B$, où $B$ est le point tel que $A=R(B)$

0,5 2) a) Vérifier que : $m'-a=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

0,5 b) En déduire que les points $A, M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si les points $A, B, \Omega$ et $M$ sont cocycliques.

0,5 c) Montrer que l'ensemble des points $M$ tel que les points $A, M$ et $M'$ soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

**Exercice 4 : (7,5 points)**

**Partie I :**

0,5 1) a) Montrer que : $(\forall x\in ]0;+\infty[);\ \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x-\ln(1+x)$

0,5 b) En utilisant le changement de variable $u=t^2$, montrer que :

$$(\forall x\in ]0;+\infty[);\ \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

0,5 c) En déduire que : $(\forall x\in ]0;+\infty[);\ \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$

0,25 2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

**Partie II :**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x);\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,25 1) a) Montrer que $f$ est continue à droite en 0

0,5 b) Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0

(On pourra utiliser le résultat de la question Partie I-2))

0,75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 2) a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x\in ]0;+\infty[);\ f'(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

0,25 b) En déduire que $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

0,25 c) Vérifier que : $f([0;+\infty[)=[1;+\infty[$

0,5 3) Représenter graphiquement la courbe $(C)$.

(On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0)

**Partie III :**

1) On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$

0,5 a) Montrer que : $(\forall x\in ]0;+\infty[);\ 0<f'(x)\leq \frac{1}{2}$

0,5 b) En déduire que $g$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ puis montrer que : $g(]0;+\infty[)=]-\infty;1[$

0,25 c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$.

2) Soit $a$ un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=a$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_{n+1}=f(u_n)$.

0,25 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n>0$

0,5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0,5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_n-\alpha|\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$

0,25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$ .

**Exercice 5 : (2,5 points)**

On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

0,5 1) Montrer que $F$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 2) a) Montrer que : $(\forall x\in ]0;+\infty[);\ F(x)\geq x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0,5 b) Montrer que $F$ est impaire, et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$

0,5 c) Montrer que $F$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

0,5 d) Montrer que la bijection réciproque $G$ de $F$ est dérivable en 0 puis calculer $G'(0)$

**FIN**