3 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــــــــــــــــات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIOS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants

entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique Et des suites numériques	11 points

Exercice 1 :(3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les Points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$

1 1) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$
Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R=5$

0,25 3) a) Vérifier que $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 b) Déterminer les coordonnées de H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)

0,75 4) Vérifier que $d(\Omega,(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre

Exercice 2 :(3 points)

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $2z^2+2z+5=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on Considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

0,25 a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

0,5 b) On considère le point A d'affixe $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R, soit b l'affixe du point B, montrer que $b=d\,a$

3) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation T et c L'affixe de C

0,75 a) Vérifier que $c=b+a$ et en déduire que $c=a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(on pourra utiliser la question 2)b))

0,75 b) Déterminer $\arg\left(\dfrac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral

<u>Exercice 3 :(3 points)</u>

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : <u>cinq boules rouges</u> portant les nombres 1 ;1 ;2 ;2 ;2 et <u>quatre boules blanches</u> portant les nombres 1 ;2 ;2 ;2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements :

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées portent le même nombre »

C : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre »

1,5 1) Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{6}$, $p(B)=\dfrac{1}{4}$ et $p(C)=\dfrac{1}{42}$

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois la réalisation de l'événement A

0,5 a) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X

1 b) Montrer que $p(X=1)=\dfrac{25}{72}$ et calculer $p(X=2)$

<u>Problème :(11 points)</u>

I – Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$

par : $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

0,25 1) Vérifier que $g(0)=0$

0,5 2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ *et* $[0,+\infty[$

II – Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^{2}-x)e^{-x}+x$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ **(unité : 1 cm)**

0,5 1) a) Vérifier que $f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}-\dfrac{x}{e^{x}}+x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,75 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ puis en déduire que (C) admet une asymptote (D) au

Voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$

0,5 c) Vérifier que : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

0,5 d) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

0,25 2) a) Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) En déduire que (C) est au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]1, +\infty]$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0,1]$

0,75 3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

0,25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,25 4) a) Vérifier que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b) En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4

1 5) Construire (D) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(4) \simeq 4,2$)

0,5 6) a) Montrer que la fonction $H: x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \dfrac{2e - 5}{e}$

0,75 b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x e^{-x} dx = \dfrac{e - 2}{e}$

0,75 c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

III - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

0,75 1) Montrer que $0 \le u_n \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser la question II-3)b))

0,5 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0,75 3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN