المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⴰⵣⵓⵍⵉⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة العادية 2017

-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS	NS 24

المادة	الرياضيـــــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - (خيار فرنسية)	المعامل	9

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte quatre exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari

Exercice 1	**Les structures algébriques**	**3,5 points**
Exercice 2	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 3	**L'arithmétique**	**3 points**
Exercice 4	**L'analyse**	**10 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+,\times\right)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ on pose

$M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\left\{M(a,b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5 1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+\right)$

0,5 2) On définit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$\left(\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right);\ M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$

Vérifier que E est stable dans $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),T\right)$

3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ dans E définie par :

$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}\right);\ \varphi(a+ib)=M(a,b)$

0,75 a) Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ où $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0,75 b) En déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.

0,5 4) a) Montrer que la loi de composition interne « T » est distributive par rapport à la loi de composition interne « + » dans E.

0 ,5 b) En déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif

Exercice 2 : (3,5 points)

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : 2z^2 + 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

0,5 1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (2im)^2$

0,5 2)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m)

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

On suppose que : $m \in \mathbb{C} \setminus \{0,1,i\}$ et on pose $z_1 = \dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \dfrac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1$ et z_2

0,25 1) a) Vérifier que : $z_1 = i z_2 + 1$

0,5 b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = \dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 2) a) Vérifier que : $\dfrac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\dfrac{m-1}{m-i}$

0,5 b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés, alors M appartient cercle de (C) de diamètre $[AB]$

0,75 c) Déterminer l'ensemble des points M tel que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques. (Remarquer que : $\dfrac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2017 est un nombre premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5

1) Soit le couple $(x;y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0,25 a) Vérifier que : $p < 2017$

0,5 b) Montrer que : p ne divise pas y

0,75	c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\left[p\right]$ et en déduire que p divise 2016
0,5	d) Montrer que : $p=7$
1	2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ Vérifiant $px+y^{p-1}=2017$.

Exercice 4 : (10 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et } \left(\forall x\in]0;+\infty[\right);\ f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

0,25 — 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 — b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 — c) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 — 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,25 — b) Donner le tableau de variation de la fonction f

0,75 — 3) a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on Déterminera les coordonnées

0,5 — b) Tracer la courbe (C). (On prendra : $f(1)\simeq 0,7$ et $4e^{-3}\simeq 0,2$)

Partie II :

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_x^1 f(t)dt$$

0,25 — 1) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$

0,5 — 2) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\left(\forall x\in]0;+\infty[\right);\ \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

0,25	b) Déterminer $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ pour tout x de $]0;+\infty[$
0,5	c) Montrer que : $\int_x^1 f(t)dt = e^{-1}$
0,5	3) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les Droites d'équations : $x=0,\ x=2\ et\ y=0$
	4) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n = F(n)-F(n+1)$$
0,5	a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : Pour tout entier naturel n, il existe un réel v_n de l'intervalle $]n;n+2[$ tel que : $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$
0,25	b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \le u_n \le 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$
0,25	c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
	Partie III :
0,5	1) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un nombre réel strictement positif a_n tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$
0,25	b) Montrer que la suite numérique $(a_n)_{n\ge1}$ est croissante
0,25	c) Vérifier que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$
0,25	2) a) Montrer que : $\left(\forall t\in[0;+\infty[\right);\ 1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2$
0,5	b) Montrer que : $\left(\forall x\in[0;+\infty[\right);\ -\frac{x^2}{2} \le -x+\ln(1+x) \le -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$
	3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4
0,5	a) Vérifier que $a_4 \ge 1$ et en déduire que : $a_n \ge 1$ (On admet que : $e^{\frac{3}{4}} \ge 2$)
0,5	b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n} \le \frac{2a_n^2}{n} \le 1$ (On pourra utiliser les questions 1)c) et

	2)b) de la partie III)
0,5	c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (On pourra utiliser les questions 3)a) et 3)b)) et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$
0,5	d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari