المادة	الرياضيـــــــــــــــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	3 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	المعامل	7

INSTRUCTIOS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants

entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et des suites numériques	11 points

Exercice 1 :(3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

0,5 1) a) Montrer que $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0,75 b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1,1,0)$ est le point de contact

0,25 2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P)

0,75 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1,1,0)$

0,75 3) Montrer que $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB

Exercice 2 :(3 points)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre parmi les nombres suivants : 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne

1,5 1) Soit A : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 »

B : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

Montrer que : $p(A)=\dfrac{5}{14}$ et que $p(B)=\dfrac{1}{7}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées

0,5 a) Montrer que : $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$

1 b) Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse

x_i	**0**	**4**	**8**	**16**
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

Exercice 3 :(3 points)

On considère les nombres complexes a et b tels que $a=\sqrt{3}+i$ et

$b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

0,25 1) a) Vérifier que : $b=(1+i)a$

0,5 b) En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

0,5 c) Déduire de ce qui précède que : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe $c=-1+i\sqrt{3}$

0,75 a) Vérifier que $c=ia$ et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

0,5 b) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

0,5 c) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré

Problème :(11 points)

I – Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+x-2+2\ln x$$

0,25 1) Vérifier que $g(1)=0$

1 2) A partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Montrer que $g(x)\le 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1]$ et que

$g(x)\ge 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,+\infty[$

II – On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ **(unité : 1 cm)**

0,5 1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

0,25 2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,75 b) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y=x$

1 3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$

0,75 b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$

0,25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$

0,5 4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$

0,5 b) En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées

0,75 c) Montrer que $f(x)\le x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$

1 5) Construire ,dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre $2,4$ et $2,5$)

0,5 6) a) Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0,25 b) Montrer que la fonction $H: x\mapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la

	fonction $h: x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$
0 ,5	c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \left(\dfrac{2}{x} - 1\right) \ln x \, dx = (1 - \ln 2)^2$
0,5	d) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$
	III – On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n
0,5	1) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n
0,5	2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser la question II-4)c))
0,75	3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

FIN