

1/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2016
-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS

NS 25

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⴰ ⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⴰⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والابتداء

المركز الوطني للتقويم والامتحانات
والتوجيه

| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 4 ساعات |
|------------------|--|-------------|---------|
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - (الترجمة الفرنسية) | المعامل | 9 |

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures
- ✓ L'épreuve comporte quatre exercices indépendants
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

| | | |
|------------|----------------------------|------------|
| Exercice 1 | Les structures algébriques | 3,5 points |
| Exercice 2 | L'arithmétique | 3 points |
| Exercice 3 | Les nombres complexes | 3,5 points |
| Exercice 4 | L'analyse 1 | 7 points |
| Exercice 5 | L'analyse 2 | 3 points |

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

2/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2016 – الموضوع
مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية – (أ) و (ب) – (الترجمة الفرنسية)

NS 25

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +, \times)$ est un anneau

unitaire non commutatif et non intègre dont l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et

$$E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,5

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +)$

0,5

2) Vérifier que :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2); M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3) On pose $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$ et on considère l'application φ de \mathbb{C}^* vers E définie

$$\text{par : } (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); \varphi(x + iy) = M(x, y)$$

0,25

a) Montrer que φ est un homomorphisme de (\mathbb{C}^*, \times) vers (E, \times)

0,75

b) En déduire que (E^*, \times) est un groupe commutatif et que son élément

$$\text{neutre est } M(1, 0)$$

0,5

4) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif

$$5) \text{ On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

a) Calculer $A \times M(x, y)$ pour tout $M(x, y) \in E$

0,5

b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$

Exercice 2 : (3 points)**Partie I :**

Soit (a, b) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre 173 divise $a^3 + b^3$.

0,25

1) Montrer que : $a^3 \equiv -b^3 \pmod{173}$ [1/3] (remarquer que : $171 = 3 \times 57$)

3/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2016 – الموضوع
مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية – (أ) و (ب) – (الترجمة الفرنسية)

NS 25

0,25

3) On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$

4) On suppose que 173 ne divise pas a

0,5

a) En utilisant le théorème de Fermat, Montrer que : $a^{172} \equiv b^{172} [173]$

0,5

b) Montrer que : $a^{171}(a + b) \equiv 0 [173]$

0,5

c) En déduire que 173 divise $a + b$

Partie II :

On considère, dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation (E): $x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E).

On pose : $x + y = 173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

0,25

1) Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$

0,5

2) Montrer que $k = 1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice 3 : (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points M_1 et M_2 du plan complexe tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives de M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z

Vérifie la relation : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

0,5

1) a) Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$

0,5

b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0,5

2) Montrer que si $z_2 = \bar{z}_1$, alors M appartient à l'axe des réels

3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure

0,5

a) Calculer z en fonction de z_1 et de α

4/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2016 – الموضوع
 مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية – (أ) و (ب) – (الترجمة الفرنسية)

NS 25

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0, \pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation :

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$$

0,5

a) Sans calculer z_1 et z_2 , vérifier que : $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$

0,5

b) Donner en fonction de θ , la forme trigonométrique du nombre complexe z

Exercice 4 : (7 points)

Partie I :

0,5

1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction : $t \mapsto e^{-t}$,
 Montrer que pour tout réel strictement positif x , il existe un réel θ compris

Entre 0 et x tel que : $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$

0,25

2) En déduire que :

a) $(\forall x > 0), 1 - x < e^{-x}$

0,25

b) $(\forall x > 0), x + 1 < e^x$

0,25

c) $(\forall x > 0), 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

0,5

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

0,5

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat

0,25

2) a) Montrer que : $(\forall x > 0), x - \frac{x^2}{2} < -e^{-x} - 1$.

5/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2016 - الموضوع
 مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية – (أ) و (ب) – (الترجمة الفرنسية)

NS 25

0,5

3) a) Vérifier que : $(\forall x > 0), \frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \times f(x)$

0,75

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$, puis interpréter le résultat obtenu

0,75

4) a) Montrer que f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0, +\infty[$, et que :

$$(\forall x > 0), f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

0,5

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2)b) de la partie I)

Partie III :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \ln(f(u_n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

0,5

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 0$

0,5

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle
 Est convergente

0,5

3) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln(f(x)) = x$, puis déterminer
 La limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$$

0,5

1) a) Étudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0,5

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$

6/6

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2016 - الموضوع
مادة: الرياضيات – شعبة العلوم الرياضية – (أ) و (ب) – (الترجمة الفرنسية)

NS 25

0,5

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0,25

3) a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle J que l'on déterminera

0,5

b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F .

FIN