المادة	الرياضيـــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	3 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	المعامل	7

INSTRUCTIOS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8,5 points

Exercice 1 :(2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

0,75 1) Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout entier naturel n, puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n

2) Soit la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ pour tout entier naturel n

0,75 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

0,5 b) Montrer que $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout entier naturel n, puis écrire u_n en fonction de n

0,5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 :(3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$, $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

0,5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

0,5 b) En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 2) a) Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1,-1,0)$ et pour rayon 6

0,5 b) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)

0,5	3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)
0,5	b) Montrer que le point est le centre du cercle (Γ)
	Exercice 3 :(3 points)
0,75	1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4z+29=0$
	2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives ω, a et b telles que $\omega=2+5i$, $a=5+2i$ et $b=5+8i$
0,75	a) Soit u le nombre complexe tel que $u=b-\omega$ Vérifier que $u=3+3i$ puis montrer que $\arg u\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
0,25	b) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$ ($\bar{u}$ étant le conjugué de u)
0,75	c) Vérifier que $a-\omega=\bar{u}$ puis en déduire que $\Omega A=\Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
0,5	d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du point A par la rotation R
	Exercice 4 (3 points) Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher) On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.
1	1) Soit A l'événement : « Les deux boules tirées sont rouges » Montrer que $p(A)=\frac{2}{15}$
	2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges Restantes dans l'urne après le tirage de deux boules.
0,5	a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2,3,4\}$

1,5	b) Montrer que $p(X=3)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

0,25 A- 1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

0,5 b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,5 2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

0,5 3) a) Montrer que $f'(x)=2(e^{x}-1)^{2}$ pour tout réel x

0,25 b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

(Remarquer que $f'(0)=0$)

0,75 c) Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

0,5 4) a) Montrer que la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty,\ln 4[$

0,5 b) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0,-5)$

0,75	c) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
0,5	5) a) Montrer que $\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=-\frac{9}{2}$
0,5	b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 4$
0,5	B-1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y''-3y'+2y=0$
0,5	b) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0)=-3$ et $g'(0)=-2$
	2) Soit la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ par : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^x\right)$
0,75	a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$
0,75	b) Vérifier que $h(\ln 5)=\ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

FIN