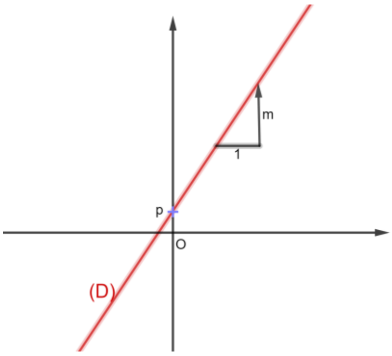
1 – Equation réduite d'une droite

Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées.

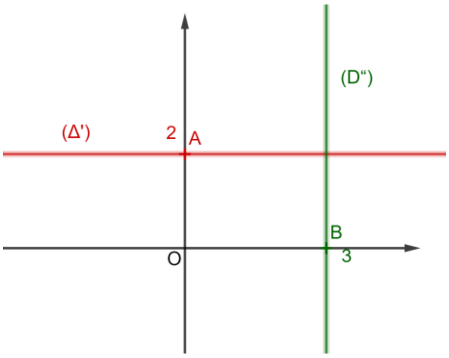


- L'équation réduite de la droite (D) est une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels
- Le nombre réel m est appelé le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (D)
- Le nombre réel p est appelé l'ordonnée à l'origine

Exemples

- $(D): y = 2x - 3$ est l'équation réduite de la droite (D), de coefficient directeur 2 et dont l'ordonnée à l'origine est -3.
- $(\Delta): y = -4x + 1$ est l'équation réduite de la droite (Δ), de coefficient directeur -4 et dont l'ordonnée à l'origine est 1.
- $(D'): y = 5x$ est l'équation réduite de la droite (D'), de coefficient directeur 5 et dont l'ordonnée à l'origine est 0.

Cas particuliers



- $(\Delta'): y = 2$ est l'équation réduite de la droite (Δ'), de coefficient directeur 0 et dont l'ordonnée à l'origine est 2. La droite (Δ') est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $A(0,2)$
- $(D''): x = 3$ est l'équation de la droite (D'') qui est parallèle à l'axe
- des ordonnées et qui passe par le point $B(3,0)$

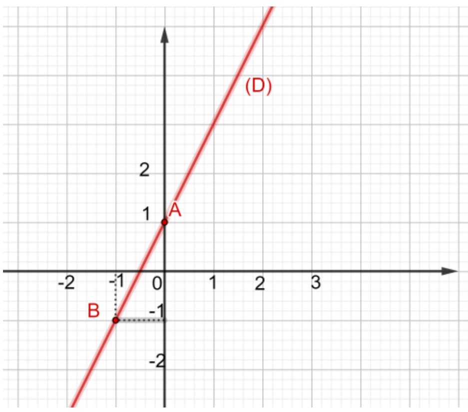
Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère la droite (D) $y = mx + p$ et $A(x_A, y_A)$ un point

Alors $A(x_A, y_A)$ est un point de la droite (D) si et seulement si $y_A = m x_A + p$

2 – Construction d'une droite définie par son équation réduite

Exemple 1



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère la droite (D) : $y = 2x + 1$.

Tracer la droite (D) dans le repère $(O;I,J)$.

Soient $A(0, y_A)$ *et* $B(-1, y_B)$ deux points de la droite (D). Alors :

$y_A = 2\times 0 + 1 = 1$ *et* $y_B = 2\times(-1) + 1 = -1$. D'où $A(0,1)$ *et* $B(-1,-1)$

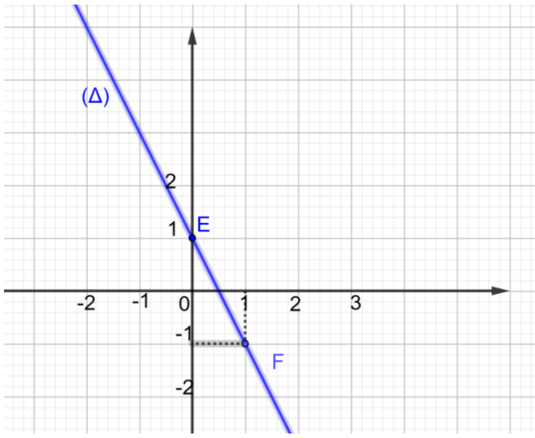
	x	y
A(0,1)	0	1
B(-1,-1)	-1	-1

Exemple 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère

La droite (Δ): $y=-2x+1$. Tracer la droite (Δ) dans le repère $(O;I,J)$. On a Les points E(0,1) et F(-1,-1) appartiennent à la Droite (Δ).

	x	y
E(0,1)	0	1
F(-1,-1)	1	-1

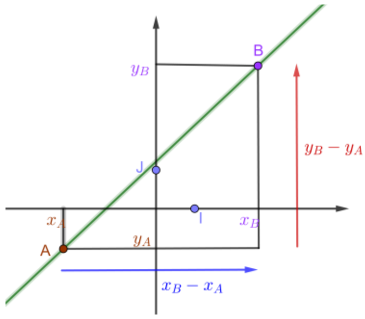


3 – Détermination de l'équation réduite d'une droite donnée

a – Coefficient directeur d'une droite passant par deux points

Proposition

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts du plan tels que $x_A \neq x_B$, alors le coefficient directeur (la pente) de la droite (AB) est : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

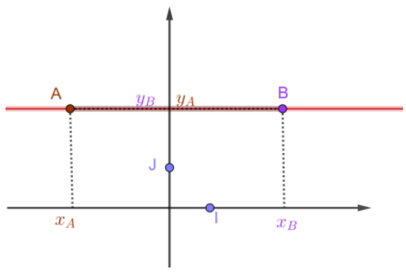


Exemples

- Le coefficient directeur de la droite (AB) telle que $A(-1,2)$ et $B(3,5)$ est
$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-(-1)}{3-2}=\frac{6}{1}=6$$
- La pente de la droite (EF) telle que $E(0,2)$ et $F(-1,5)$ est : $m=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{5-2}{-1-0}=\dfrac{3}{-1}=-3$

Eemarque

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points distincts du plan tels que $x_A \neq x_B$ et $y_A = y_B$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m=0$. Par conséquent la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses.



b – Equation réduite d'une droite passant par deux points

Méthode

Pour déterminer l'équation réduite $y=mx+p$ de la droite (AB) où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$:

- On calcule le coefficient directeur de la droite (AB) : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- On calcule l'ordonnée à l'origine : $p=y_A-\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\times x_A$

Exemple 1

Déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par le point $C(-2,3)$ et de coefficient directeur $m=3$.

Puisque le coefficient directeur de la droite (D) est $m=3$, alors son équation réduite est de la forme $y=3x+p$; et puisque $C(-2,3)\in(D)$ alors $y_C=3x_C+p$ d'où $p=3-3\times(-2)=9$.

Par conséquent $(D): y = 3x + 9$

Exercice 2

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) sachant que $\mathrm{A}(2,3)$ et $\mathrm{B}(3,5)$.

L'équation réduite de la droite (AB) est de la forme : $y = mx + p$.

On a : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-3}{3-2} = 2$

Donc $(\mathrm{AB}): y = 2x + p$

Comme $\mathrm{A}(2,3) \in (\mathrm{AB})$, alors $y_A = 2x_A + p$ donc $3 = 2 \times 2 + p$ d'où $p = 3 - 4 = -1$.

Alors $(\mathrm{AB}): y = 2x - 1$

Exemple 3

Soit $E(-1,1)$ et $F(3,3)$ deux points du plan. Montrer que l'équation de la droite (EF) est : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

On a : $\dfrac{1}{2}x_E + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 1 = y_E$, donc E vérifie l'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

De même $\dfrac{1}{2}x_F + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 3 = y_F$, donc F vérifie l'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. Alors (EF) : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

4 – Condition de parallélisme de deux droites

Proposition

Soient (D) et (D') deux droites telles que, $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

Les droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

Exemple 1

On considère la droite $(D): y = -3x + 5$ et on considère les points $A(3,-5)$ *et* $B(-1,7)$.

1) Les points A et B appartiennent-ils à la droite (D) ?

2) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB)

3) Montrer que les droites (D) et (AB) sont parallèles

Exemple 2

On considère la droite $(\Delta): y = 2x - 7$ et on considère le point $E(2,3)$.

1) Montrer que le point $E(2,3)$ n'appartient pas à la droite (Δ)

2) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ') passant par le point $E(2,3)$ et parallèle à la droite (Δ).

5 – Condition de perpendicularité de deux droites

Proposition

Soient (D) et (D') deux droites telles que, $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

Les droites (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $m \times m' = -1$

Exemple 1

On considère la droite $(D): y = -\dfrac{3}{2}x + 5$ et on considère les points $A(-3,5)$ *et* $B(0,7)$.

1) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB)

2) Les droites (AB) et (D) sont-elles perpendiculaires ?