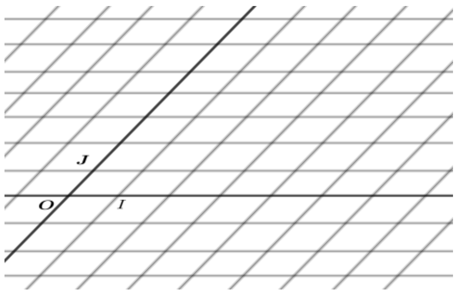
I – Repère du plan

Définition

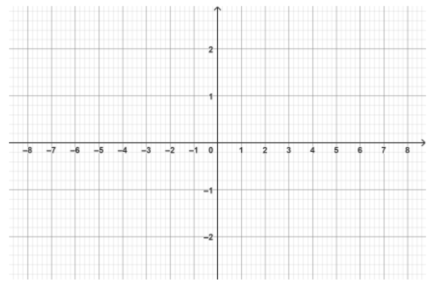
Un repère est déterminé par la donnée de trois points non alignés O, I et J, pris dans cet ordre, on le note

$(O; I, J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

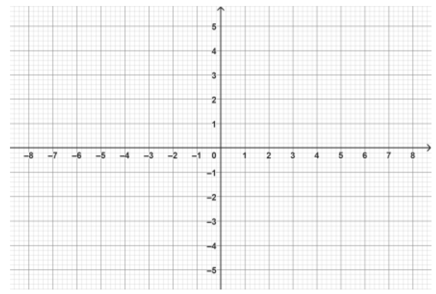
- Le point O est pris comme **origine** de ce repère
- La droite graduée (OI) est habituellement prise comme **axe des abscisses** où OI est **l'unité de graduation** de l'axe des abscisses
- La droite graduée (OJ) est habituellement prise comme **axe des ordonnées** où OJ est **l'unité de graduation** de l'axe des ordonnées
- Si $(OI)\perp(OJ)$, on dit que le repère $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est **orthogonal**
- **Si** $(OI)\perp(OJ)$ et $OI = OJ = 1$, on dit que le repère $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est **orthonormé**



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

II – Coordonnées d'un point

1 – Définition et exemples

Définition

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan. Soit M un point du plan.

- La droite qui passe par le point M qui est parallèle à l'axe (OJ), coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse x_M. Le nombre réel x_M s'appelle l'abscisse du point M dans le repère $(O; I, J)$.
- La droite qui passe par le point M qui est parallèle à l'axe (OI), coupe l'axe (OJ) en un point d'abscisse y_M. Le nombre réel y_M s'appelle l'ordonnée du point M dans le repère $(O; I, J)$
- Les nombres réels x_M et y_M s'appellent les coordonnées du point M dans le repère $(O; I, J)$. On note $M(x_M, y_M)$.

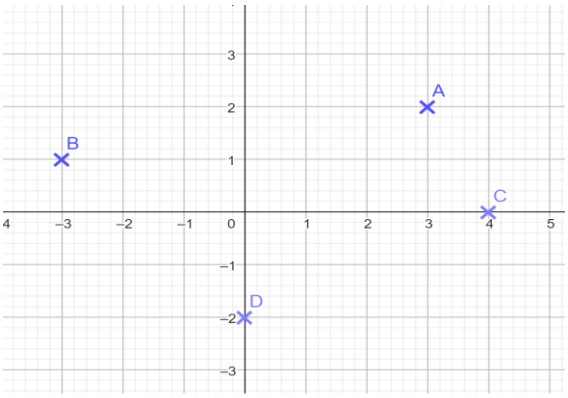
Remarque

- Si M est un point de l'axe des abscisses (OI), alors $M(x_M, 0)$
- Si M est un point de l'axe des ordonnées (OJ), alors $M(0, y_M)$.

Exercice

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.

2) Placer les points $E(1,2)$; $F(-2,3)$; $G(2,0)$; $H(0,-2)$ dans le repère ci-dessous.



2 – Coordonnées du milieu d'un segment

Proposition

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ sont : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

Exemple

Le plan est muni d'un repère $(O;I,J)$.

Les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$ tels que $A(-1,1)$ et $B(3,-1)$ sont $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$

Donc $M(1,0)$.

Exercice

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1,1); B(3,-2); C(0,3)$ et $D(-2,6)$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

III – Coordonnées d'un vecteur

1 – Définition et exemples

Proposition

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ qu'on note : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A)$ ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $E(-1,2)$; $F(3,-2)$ et $G(0,4)$.

Déterminer les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GE}$.

2 – Egalité de deux vecteurs

Proposition

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$; $C(x_C, y_C)$ et $D(x_D, y_D)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $E(3,-1)$; $F(2,1)$; $G(1,2)$ et $H(0,4)$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

2) Que peut-on dire sur les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$?

3) Quelle est la nature du quadrilatère EFHG ?

Exercice

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $U(-1,1)$; $V(2,-1)$ et $W(0,2)$.

Déterminer les coordonnées du point X pour que le quadrilatère UVWX soit un parallélogramme.

3 – Coordonnées de la somme et de la différence de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre

Proposition

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}(x,y)$ et $\overrightarrow{CD}(x',y')$ et k un nombre.

Alors :

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(x+x',y+y')$
- $k\overrightarrow{AB}(k\times x,k\times y)$
- $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(x-x',y-y')$

Exercice

Dans le plan muni d'un repère $(O;I,J)$, on considère les points $I(3,1)$; $J(2,-1)$; $K(4,0)$.

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$

b) Déterminer les coordonnées du point L pour que le quadrilatère IJLK soit un parallélogramme.

IV – Distance entre deux points

Proposition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$. Alors,

- ★ La distance entre les points A et B (ou la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est le nombre réel positif défini par :

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

- ★ Si $\overrightarrow{AB}(x,y)$ alors : $AB=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemples

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points $A(3,4)$ et $B(7,1)$.

Calculer la distance AB

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$, on considère les points $E(1,-1)$; $F(2,1)$; $G(3,0)$.

Calculer les longueurs EF, EG et FG. Quelle est la nature du triangle EFG ?