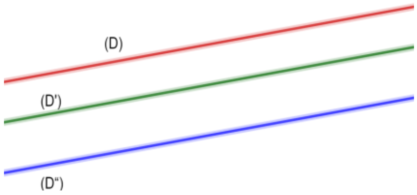
I – Translation

1 – direction et sens

Définition 1

Une droite définit une direction.

Deux droites (D) et (D') ont la même direction si et seulement si elles sont parallèles ou confondues



Remarque

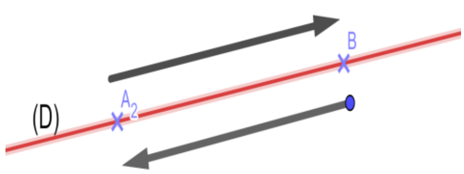
Deux droites (D) et (D') n'ont pas la même direction si et seulement si elles ne sont ni parallèles ni confondues

Définition 2

Soit (D) une droite donnée et soient A et B deux points non confondis de la droite (D) .

On peut définir deux sens sur cette droite :

- Sens de A vers B
- Sens de B vers A



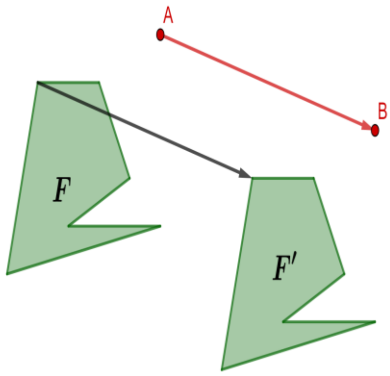
2 – Translation – déplacement rectiligne

Définition

Soient A et B deux points distincts du plan.

On appelle translation qui envoie A en B la transformation du plan telle que l'image $\mathcal{F}'$ d'une figure $\mathcal{F}$ est obtenue en faisant glisser la figure $\mathcal{F}$:

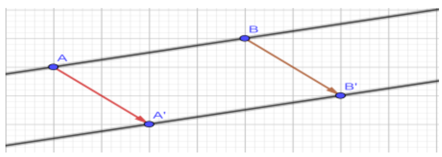
- Selon la direction de la droite (AB)
- Dans le sens de A vers B
- D'une longueur égale à AB



3 – Images des figures usuelles par une translation

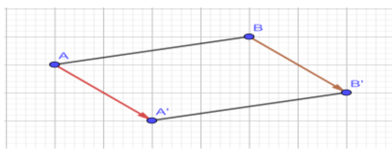
Proposition 1 (Image d'une droite par une translation)

L'image d'une droite (AB) par une translation est une droite $(A'B')$ parallèle à (AB).



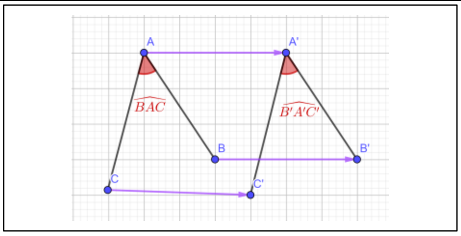
Proposition 2 (Image d'un segment par une translation)

L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment $[A'B']$ de même direction et de même longueur



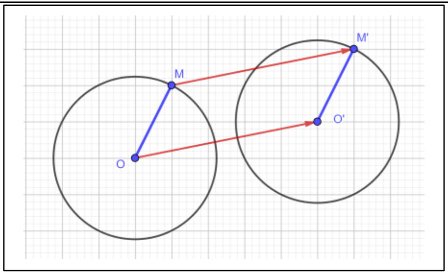
Proposition 3 (Image d'un angle par une translation)

L'image d'un angle BAC par une translation est un angle $B'A'C'$ de même mesure.



Proposition 4 (Image d'un cercle par une translation)

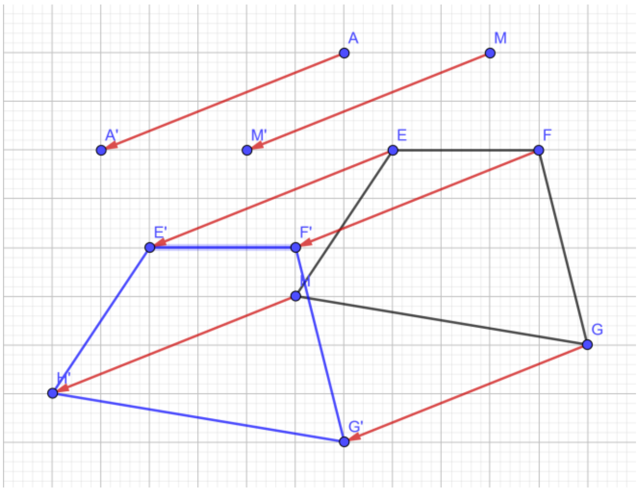
L'image d'un cercle C par une translation est un cercle C' de même rayon



4 - Construction de l'image d'une figure par une translation

Soit T la translation qui transforme A en A'.

Construire M' l'image de M par T. Construire E'F'G'H' du quadrilatère EFGH par T.



Exercice

1) a) Quelle est l'image du point C par la translation
qui transforme I en J ?

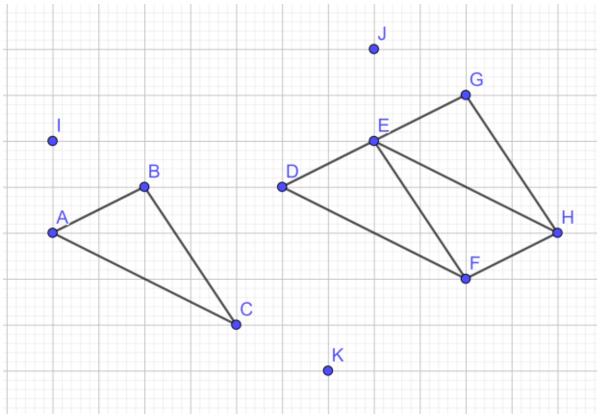
b) Quelle est l'image du triangle ABC par cette translation ?

2) a) Par quelle translation obtiens-t-on le triangle DEF
à partir du triangle ABC ?

b) Placer K' l'image du point K par cette translation.

3) Tracer l'image du triangle ABC par la translation qui
Qui transforme B en F.

4) Le triangle EGH est-il l'image du triangle DEF par une
translation ? Si oui laquelle ?



II - Notion de vecteur

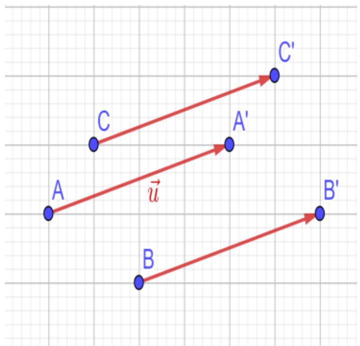
1 – Définition

Définition

On considère la translation qui transforme les points A, B et C respectivement
en A', B' et C'..

Les couples de points (A,A') ; (B,B') et (C,C') définissent un vecteur caractérisé par :

- Une direction : celle de la droite (AA')
- Un sens : de ,A vers A'
- Une longueur : la longueur AA'



Ce vecteur est noté $\vec{u}$ et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$; et on dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$ ..

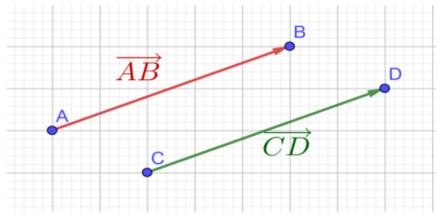
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont aussi des représentants du vecteur $\vec{u}$.

2 – Egalité de vecteurs

Définition

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

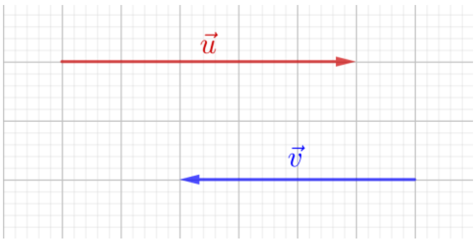


Remarque

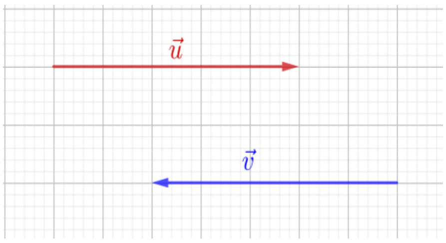
La translation qui transforme A en B est appelée aussi la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Exercice

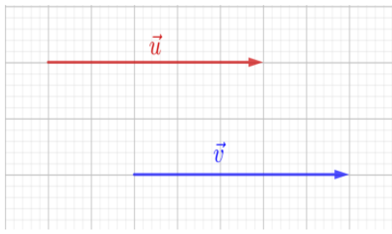
Compléter par oui ou par non : les vecteurs ont même :



direction	sens	longueur



direction	sens	longueur

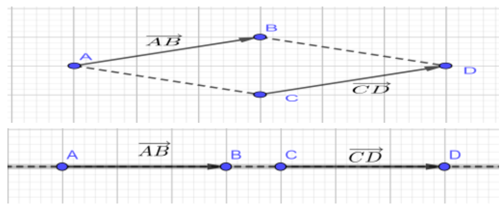


direction	sens	longueur

Proposition (Propriété caractéristique 1 du parallélogramme)

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.



Méthode : Construction d'un point défini par l'égalité de vecteurs

1) Soient A, B et C trois points donnés. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

2) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

3) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$

Proposition (Propriété du milieu)

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

3 – Vecteur nul

Définition

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul, et on note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, si et seulement si les points A et B sont confondus.

Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $A = B$

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ est le seul vecteur qui n'a ni direction ni sens

4 – Vecteurs opposés

Définition

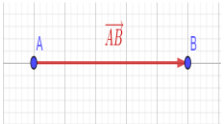
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits opposés si et seulement s'ils ont la même direction, la même norme et les sens opposés. On note $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

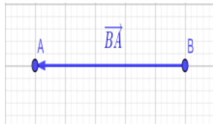
Autrement dit : $\vec{v} = -\vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} \vec{v} \text{ et } \vec{u} \text{ ont la même direction} \\ \vec{v} \text{ et } \vec{u} \text{ ont la même norme} \\ \vec{v} \text{ et } \vec{u} \text{ ont les sens opposés} \end{cases}$

Proposition

Soient A et B deux points du plan.

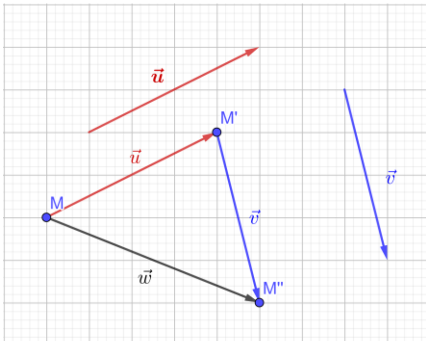
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. On écrit : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$





III – Opérations sur les vecteurs

1 – Composée ou enchainement de deux translations



Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs et M un point du plan.
Notons M' l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$
Et M'' l'image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ *et* $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$
La transformation du plan qui transforme M en M'' est appelée :
La composée ou l'enchainement des translations respectivement
De vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.
La composée de deux translations est une translation

2 – Somme de vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs.

Le vecteur de la composée des deux translations de vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ et appelé la somme des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Proposition 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs. Alors :

★ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ★ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ ★ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ★ Si $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{w} = \vec{t}$, alors $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{t}$

Proposition 2

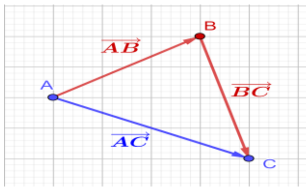
Soient A, B et I trois points du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ★ I est le milieu du segment $[AB]$
- ★ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- ★ B est le symétrique de A par rapport à I
- ★ $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$
- ★ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

3 – Relation de Chasles

Proposition (La relation de Chasles)

Pour tous les points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Remarque

Soient A et B deux points du plan. Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

Exercice

Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

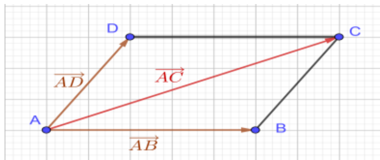
$a)\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$; $b)\ \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QM}$; $c)\ \overrightarrow{OK}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{CP}$; $d)\ \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}$; $e)\ \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}$; $f)\ \overrightarrow{KI}-\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{PK}$

4 – Propriété caractéristique 2 du parallélogramme

Proposition (Propriété caractéristique 2 du parallélogramme)

Soit ABCD un quadrilatère.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

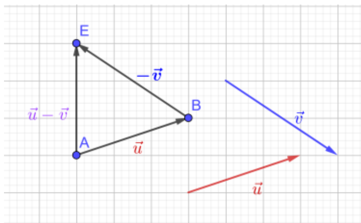


5 – Différence de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs.

On appelle la différence du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$ le vecteur ,
noté $\vec{u}-\vec{v}$ tel que : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$



Exemples

Soit ABC un triangle.

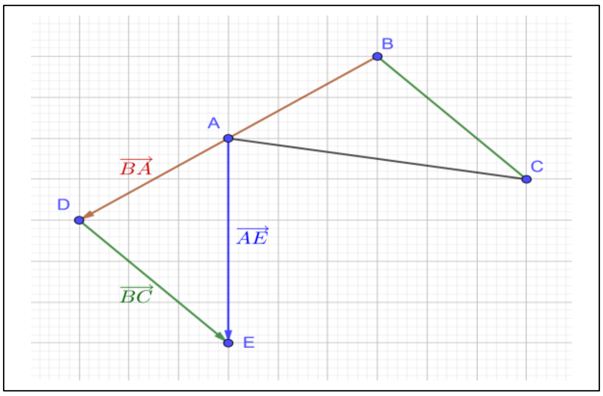
1) Simplifier l'expression vectorielle $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

2)Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

Réponses

1) On a : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ (d'après la relation de Chasles)

2) voir la figure ci-contre



IV – Produit d'un vecteur par un réel

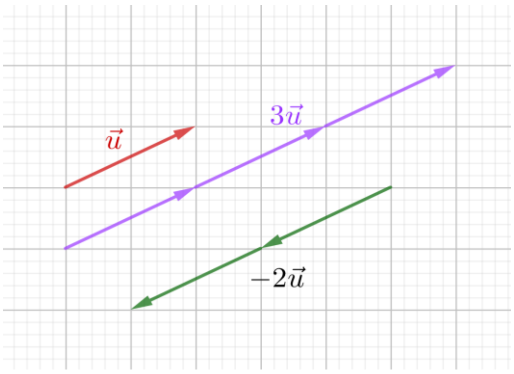
1 – Définition et méthodes

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et soit k un nombre non nul.

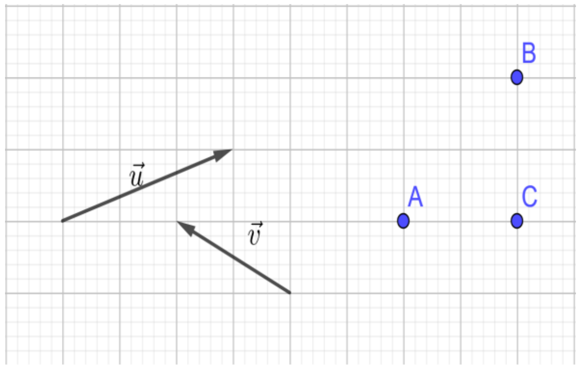
On appelle « produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k » le vecteur, noté $k\vec{u}$, ayant :

- La même direction que le vecteur $\vec{u}$
- Le même sens que le vecteur $\vec{u}$ si $k>0$; et le sens opposé que le vecteur $\vec{u}$ si $k<0$.
- De norme égale à :
  - k fois la norme de $\vec{u}$ si $k>0$
  - $-$k fois la norme de $\vec{u}$ si k < 0



Remarques

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
  Appliquer 3 fois la translation de vecteur $\vec{u}$, revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w} = 3\vec{u}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $3\vec{u}$ ont la même direction et le même sens
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont la même direction seulement.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$



Exemples

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Représenter sur la figure ci-contre

Les vecteurs : $2\vec{u}$, $-\vec{v}$ et $2\vec{u} - \vec{v}$

2) Soient A, B et C trois points du plan. Représenter sur la même figure le vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

2 – Colinéarité de vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

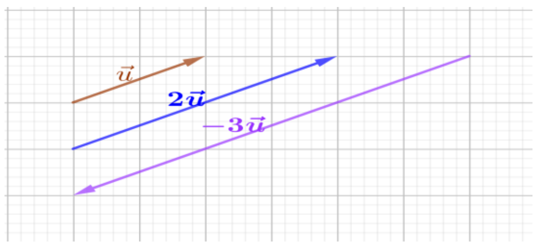
Autrement dit : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont colinéaires.



Exercice

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $3\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Proposition 1 (Alignement des points)

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice

Soit ABC un triangle. On considère les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

a) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Remarque

Pour montrer que les points M, N et P sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont alignés ou que Les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont alignés ou que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont alignés.

Proposition 2 (Parallélisme des droites)

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice

Soit ABC un triangle. On considère les points D et E du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

Montrer que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

3 – Composée de deux symétries centrales

Proposition

Soient A et B deux points distincts du plan.
La composée de la symétrie centrale de centre A et de la symétrie centrale de centre B est la translation qui transforme A en B