Exercice 1

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire On pose

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}\ et\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Et $E=\left\{M\in M_3(\mathbb{R})\ /\ M=aI_3+bA+cB;\ (a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

1/ a/ Montrer que : $A\times B=B\times A=2I_3$ puis déterminer A^{-1} et B^{-1}

b/ Montrer que : $A^2=B$ et $B^2=2A$

2/ a/ Montrer que E est stable dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

b/ Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif

c/ Factoriser A^3-2I_3

Exercice 2

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}0&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ et $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble :

$$\mathcal{E}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&-b\\3b&a-2b\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1/ a/ Montrer que :

$\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\ M(a,b)\times M(c,d)=M(ac-3bd,ad+bc-2bd)$

b/ En déduire que $\mathcal{E}$ est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2/ On considère l'application $\begin{array}{rcl} f:\mathcal{E} & \to & \mathbb{C}\\ \mathrm{M}(a,b) & \mapsto & (a-b)+ib\sqrt{2}\end{array}$:

a/ Montrer que f est une application bijective de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{C}$ et déterminer son application réciproque f^{-1}

b/ Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathcal{E}^*,\times)$ $vers$ $(\mathbb{C}^*,\times)$

3/ Monter que $(\mathcal{E},+,\times)$ est un corps commutatif

4/ a/ Soit $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $(a;b)\neq(0;0)$

Déterminer la matrice inverse de la matrice $M(a,b)$

b/ Résoudre dans $\mathcal{E}$ l'équation : $X^2=M(-1,0)$

Exercice 3

Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire tel que pour tout $x\in A,\ on\ a: x^{12}=x$. On note 0 l'élément neutre de + et 1 l'élément neutre de $\times$.

1) Montrer que : $(\forall x\in A),\ x=-x$

2) Montrer que : $(\forall x\in A),\ x^8+x^4=0$ (Remarquer que : $(x+1)^{12}=x+1$)

3) Montrer que : $(\forall x\in A),\ x^2=x$

Exercice 4

I-Pour tout x et y de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose : $x * y = x + y - 2xy$

1/Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2/Montrer que $*$ est commutative et associative

3/Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif (ou abélien)

4/Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$; $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ fois} = \frac{1}{2}\left[1-(1-2x)^n\right]$

II-Pour tout x de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ on pose $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ et $E = \left\{A(x) \,/\ x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$

1/Montrer que E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times\right)$

2/On considère l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \to E \\ x \mapsto A(x) \end{array}$

a/Montrer que f est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ dans $(E, \times)$

b/En déduire la structure algébrique de $(E, \times)$

c/On pose $B = A\left(-\frac{1}{2}\right)$. Soit n de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \quad et \quad \left(B^n\right)^{-1} = A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Exercice 5

Partie I :

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, on considère la matrice $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices : $\mathcal{E} = \left\{M_{(a,b)} \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2) Montrer que $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

b) Déterminer les matrices de $\mathcal{E}$ qui admettent des inverses dans l'anneau $(\mathcal{E}, +, \times)$.

c) En déduire que $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Partie II :

Soit σ un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $(1, \sigma)$ est une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \bullet)$.

2) On considère l'application ψ définie de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{C}$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{E} & \to & \mathbb{C} \\ M_{(a,b)} & \mapsto & a+\sigma b \end{array}$$

Montrer que ψ est un homomorphisme bijectif de $(\mathcal{E},+)$ vers $(\mathbb{C},+)$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation et donner ses solutions sous la forme trigonométrique..

4) On suppose dans cette question que : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathcal{E},\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$.