Exercice 1 (AREF de Mohammedia-Session de février 1995)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 4x^2-9y^2=432$.

1) a) Montrer que si (x,y) est une solution de l'équation (E), alors 3 est un diviseur de x et que 2 est un diviseur de y.

b) Montrer que si (X,Y) est une solution de l'équation : $X^2-Y^2=12$, alors $(3X,2Y)$ est une solution de l'équation (E).

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $X^2-Y^2=12$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 (AREF de Anfa – Session de février 1998)

Les questions 1) , 2) et 3) Sont indépendantes.
Soit p un nombre entier positif premier.

1) a) On suppose que : $p\geq 5$.

Montrer que : $p^2\equiv 1[3]$ et que : $2^p\equiv 2[3]$, puis en déduire que le nombre p^2+2^p n'est pas premier.

b) Montrer que si le nombre p^2+2^p est premier alors $p=3$.

2) Montrer que si p divise 2^p+1, alors $p=3$

3) a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{N}^*): (2x^2+x)^2<4(1+x+x^2+x^3+x^4)<(2x^2+x+2)^4$

b) Montrer que si la somme des diviseurs du nombre p^4 est un carré parfait, alors $p=3$.

Exercice 3 (AREF de Marrakech- Session de février 1999)

1) Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que : $m\wedge n=1$.

a) Montrer que : 5 ne divise pas $2m^2+n^2$.

b) En déduire que : $(2m^2+n^2)\wedge 5=1$.

2) On considère l'équation $(E): x\in\mathbb{R},\ 2x^3+x-5=0$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α telle que : $1<\alpha<2$.

b) On pose $\alpha=\dfrac{m}{n}$ où m et n deux entiers naturels non nuls tels que : $m\wedge n=1$.

i) Vérifier que : $(2m^2+n^2)m=5n^3$.

ii) Montrer que : $m=5$

c) Déduire que le nombre α n'est pas rationnel.

Exercice 4

Soient u et v de $\mathbb{Z}$. On considère dans $\mathbb{Q}$ l'équation $(E): 78x^3+ux^2+vx-14=0$.

1) On suppose que le nombre $\dfrac{14}{39}$ est une solution de l'équation (E).

a) Montrer que le couple (u,v) est une solution de l'équation : $(1)\quad 14x+39y=1129$

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer un couple (x_0,y_0) solution de l'équation : $14x+39y=1$.

c) Vérifier que le couple $(15806,-5645)$ est une solution de l'équation (1) et résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

2) Soit (x,y) un couple de $\mathbb{Z}^2$ qui est solution de l'équation (1).

a) Déterminer les valeurs possibles de $x\wedge y$. (Remarquer que 1129 est premier)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1) tel que $x \wedge y = 1129$.

3) Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel tel que $p \wedge q = 1$.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une solution de l'équation (E), alors $p / 14$ et $q / 78$.

b) Déduire que l'ensemble des solutions non naturels de l'équation (E) est inclus dans un ensemble qui contient 40 éléments, en déterminant ceux qui sont positifs.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2^n + 3^n$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $a_n \wedge a_{n+1} = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $a_n \equiv 0[5]$.

3) Soit m un entier naturel impair et premier avec 5.

a) Montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N}): a_n = 5 s_k$ où $s_k = \sum_{p=0}^{2k} 2^{2k-p} \times (-3)^p$

b) Montrer que : $s_k \equiv m \times 2^{m-1}[5]$

c) En déduire que 5 ne divise pas s_k.

d) Montrer qu'il n'existe pas deux entiers naturels b et α tels que : $a_n = b^\alpha$ et $\alpha \geq 2$

Exercice 6 (Théorème chinois)

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $(S): \begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $p \wedge q = 1$.

1) a) Montrer que : $\left(\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2\right)$: $pu_0 + qv_0 = 1$.

b) Montrer que l'entier $x_0 = b\, pu_0 + aqv_0$ est une solution du système (S).

2) Soit x une solution de (S). Montrer que : $pq / x - x_0$.

3) Soit x un entier relatif tel que : $pq / x - x_0$. Montrer que x est une solution de (S).

4) Déduire l'ensemble des solutions de (S).

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$.