Exercice 1

On considère f la fonction numérique définie par : $f(x)=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer les limites de f aux borne de D_f.

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en $x_0=1$, puis interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f-\{1\}$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f.

3) a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0

b) Construire la courbe (C_f)

Exercice 2

On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter ces résultats graphiquement.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (T).

c) Construire la droite (T) et la courbe (C_f).

Exercice 3

On considère f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en -2 et à droite en 0. Interpréter ces deux résultats Graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $D_f-\{-2,0\}$.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $D_f-\{-2,0\}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Construire la courbe (C_f).

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1+\sin x}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

1) a) Montrer que : $D_f=\mathbb{R}^*$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et interpréter ces résultats graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to0} x\,f(x)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$, l'équation : $f(x)=1$.

5) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$, $\dfrac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\le f(x)\le\dfrac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Exercice 5

On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\cos^2 x$ ..

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x\le f(x)\le x+1$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Donner une interprétation graphique de l'encadrement de la question a).

2) Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives $y=x$ et $y=x+1$.

Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec la droite (D_1) et avec la droite (D_2).

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et montrer que $f'(x)=1-\sin(2x)$.

b) En déduire le sens de variations de la fonction f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f'(x)=0$.

d) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,\pi]$.

4) Construire les droites (D_1) et (D_2) et la courbe (C_f) sur $[0,\pi]$.

5) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f(x+\pi)=\pi+f(x)$.

b) Compléter la construction de la courbe (C_f) sur $[-\pi,2\pi]$.

Exercice 6

On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=1-x+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\ ;\ x\ge0 \\ f(x)=3-\dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}\ ;\ x\le0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0puis interpréter le résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x *de* $\mathbb{R}^*$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3) a) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \ de \ \mathbb{R}^{*-}$, puis déduire que la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion qu'on notera A..

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point A.

4) Construire la courbe $\left(C_f\right)$.