Exercice 1

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice nulle

$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&-b\\b&a\end{pmatrix}/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire

3) a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a : $(x^2+xy+y^2=0)\Leftrightarrow(x=y=0)$

b) Déterminer les éléments de E ayant un inverse dans l'anneau $(E,+,\times)$

c) En déduire que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif

Exercice 2

Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que : $(\forall x\in A),\ x^2=x$

1) Montrer que : $(\forall x\in A),\ x+x=0$

2) Montrer que l'anneau $(A,+,\times)$ est commutatif

3) En déduire la valeur de $xy(x+y)$ pour tout $(x,y)\in A^2$

4) Soit $(x,y)\in A^2$ tel que $x\neq0,\ y\neq0\ et\ x\neq y$. Montrer que $x+y\notin\{0,x,y\}$

5) On suppose que $A=\{0,x,y,x+y\}$. Donner la table de la loi « + » dans l'anneau $(A,+,\times)$

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,\times)$

1) Montrer que : $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,\times)$ est un corps si, et seulement si n est premier)

2) On suppose que n est un nombre premier

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'équation $x^2=\overline{1}$

b) En déduire que : $(n-1)!\equiv-1\,[n]$

Exercice 4

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_p=\{x\in A/\ px=0\}$

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $A_p \neq \varnothing$

b) Montrer que A_p est stable pour les deux lois dans l'anneau $(A,+,\times)$

c) Montrer que $(A_p,+,\times)$ est un anneau

d) Montrer que $(\forall \alpha \in A)\ (\forall x \in A_p),\ \alpha x \in A_p$

2) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

a) Montrer que si p divise q alors $A_p \subset A_q$

b) On pose $d = p \wedge q$. Montrer que $A_p \cap A_q = A_d$

3) Soit p un nombre positif et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_n \subset A_p$, alors $A_n = \{0\}$ ou $A_n = A_p$

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ .On pose $I =]1,+\infty[$ et considère dans I la relation $*$ définie par :

$$\left(\forall (x,y) \in I^2\right) : x * y = (x-a)(y-a)+a$$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

2) a) Etudier la commutativité de $*$

b) Montrer que $*$ est associative

3) Montrer que $*$ admet un élément neutre e dans I que l'on déterminera

4) Montrer que $J =]a+1,+\infty[$ est stable dans $(I,*)$.

5) Pour tout entier n te que $n \geq 2$, on pose : $x^{(n)} = \underbrace{x*x*x*...*x}_{n\ fois}$

Montrer que : $(\forall n \geq 2),\ x^{(n)} = (x-a)^n + a$