Exercice 1

1) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, les entiers naturels a et b sont premiers entre eux dans chacun des cas suivants :

a) $a=3n+2$ et $b=2n+1$; b) $a=n^2$ et $b=n+1$; c) $a=2n+1$ et $b=2n(n+1)$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $\mathrm{A}=n^4+n^2+1$.

a) En remarquant que : $\mathrm{A}=n^4+2n^2+1-n^2$, montrer que A peut s'écrire comme produit de deux facteurs du second degré.

b) On pose $a=n^2+n+1$ et $b=n^2-n+1$.

i) Démontrer que a et b sont impairs.

ii) Soit d un diviseur commun à a et b. Démontrer que d divise $2n$ et $2(n^2+1)$.

iii) Montrer que n et n^2+1 sont premiers entre eux.

iv) En déduire que a et b sont premiers entre eux.

3) Déterminer les entiers naturels n dont le reste dans la division euclidienne par 9 est 7 et dont le reste dans la division euclidienne par 7 est 1.

Exercice 2

On considère l'équation $(\mathrm{E}): 26x-17y=1$ où x et y sont deux entiers naturels.

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E).

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 3

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A et B les entiers naturels définis par : $\mathrm{A}=11n+3$ et $\mathrm{B}=13n-1$.
Démontrer que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 50.

2) Soit (E_1) : $50x-11y=1$ l'équation diophantienne où x et y sont deux entiers naturels non nuls.
En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E_1).

3) Soit $(E): 50x-11y=3$ l'équation diophantienne où x et y sont deux entiers naturels non nuls.

a) En utilisant les résultats précédents résoudre l'équation (E).

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\mathrm{PGCD}(\mathrm{A},\mathrm{B})=50$.

4) Pour quelles valeurs de n on a : $\mathrm{PGCD}(\mathrm{A},\mathrm{B})=25$?

Exercice 4

1) Soit $n\in\mathbb{N}$.

a) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{2003} par 7.

2) Soit n un entier naturel tel que : $n\geq 2$ et soit $U_n=1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$.

a) Montrer que : $U_n\equiv 0[7]\Rightarrow 3^n\equiv 1[7]$

b) Montrer que : $3^n\equiv 1[7]\Rightarrow U_n\equiv 0[7]$

c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7.

Exercice 5

On se propose de déterminer l'ensemble des entiers relatifs n solutions du système $(\mathrm{S}):\begin{cases} n\equiv 1[5] \\ n\equiv 5[7]\end{cases}$.

1) Démontrer que si n est solution de (S), alors : $\begin{cases} 4n+1 \equiv 0[5] \\ 4n+1 \equiv 0[7] \end{cases}$.

2) En déduire que pour tout entier n solution de (S), il existe un entier k tel que : $35k-4n=1$.

3) Déterminer les solutions de (S).

Exercice 6

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que : $a<b$.

1) Déterminer a et b vérifiant $\begin{cases} a^2+b^2=325 \\ a \vee b=30 \end{cases}$.

2) Déterminer a et b vérifiant $\begin{cases} a \wedge b=5 \\ a \vee b=60 \end{cases}$.

3) Déterminer a et b vérifiant $\begin{cases} ab=1440 \\ a \vee b=240 \end{cases}$.

4) Déterminer a et b vérifiant $\begin{cases} a+b=187 \\ a \vee b=30(a \wedge b) \end{cases}$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a=3n+4$ et $b=9n-5$.

1) Montrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors $a \wedge b=17$.

2) On considère l'équation $(E): 17x-3y=4$.

a) Vérifier que le couple $(8,44)$ est solution de l'équation (E).

b) Déterminer tous les couples (x,y) d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

3) En déduire les valeurs de n pour lesquelles on a : $\begin{cases} a \wedge b=17 \\ a \vee b \leq 3128 \end{cases}$

Exercice 8

1) Décomposer chacun des nombres 1078 et 644 en produit de facteurs premiers. En déduire $PGCD(1078,644)$.

2) Déterminer $PGCD(1078,644)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

3) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $1078u+644v=PGCD(1078,644)$