Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1} + 2$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

b/ Etablir que : $\forall x \in [1;+\infty[\,;\; f(x) - x = \dfrac{4-2x}{1+\sqrt{x-1}}$

c/ Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de $x_0 = 1$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[\,;\; f'(x) = \dfrac{x-2}{\left(1+\sqrt{x-1}\right)\sqrt{x-1}}$

c/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3/ a/ donner l' équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_1 = 5$

b/ Construire les droites (T) et (Δ) et la courbe (C_f)

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ et soit C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\,\vec{i},\,\vec{j})$

1/Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2/Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ et donner une interprétation graphique de ce résultat

3/a/Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b/Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ *et* $-\infty$ dont on déterminera l'équation réduite.

c/Etudier la position relative de la courbe C_f et la droite Δ

4/a/Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à gauche et interpréter ce résultat graphiquement.

b/calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f - \{0\}$ puis dresser le tableau de variation de f

5/ a/ Donner l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2

b/Construire C_f, Δ et T dans le repère $(O;\,\vec{i},\,\vec{j})$

6/ Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-2\cos x}}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, puis montrer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$.

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de $x_0 = \pi$.

b) Montrer que pour tout x de $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$ on a : $f'(x)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{(1-2\cos x)^3}}$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

3) Construire la courbe (C) sur l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{3},3\pi\right]\cap D$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-4+2\sqrt{|x-4|}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) Déterminer les branches infinies de la courbe (C).

b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0=4$ et interpréter le résultat graphiquement.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{4\}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

b) Construire la courbe (C).

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation
$(m-1)x+4-2\sqrt{|x-4|}=0$

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer D_f le domaine de définition de f

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=1$, et donner une interprétation graphique de ce résultat.

3/ Etudier la dérivabilité de f à gauche de $x_0=-1$, et donner une interprétation graphique de ce résultat.

4/ a/ Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f et calculer $f'(x)$.

b/ Etudier le signe de $f'(x)$ et donner les variations de f.

5/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D_f.

6/ Dresser le tableau de variation de la fonction f.

7) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f) aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$

8) Construire la courbe (C_f).