Exercice 1

Soient a, b, d, n et m des entiers relatifs. Montrer que :

- Si $d \mid 2n+m$ et $d \mid n+m$ alors $d \mid m$
- Si $d \mid 2n+5m$ et $d \mid n+2m$ alors $d \mid m$
- Si $d \mid n-m$ et $d \mid a-b$, alors $d \mid na-mb$
- Si $d \mid 5n+4$ et $d \mid 3n-1$, alors $d \mid 17$
- Si $d \mid 2n^2+3$ et $d \mid n-2$, alors $d \mid 11$

Exercice 2

1) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquels on a :

$a)\ (n-4)/6$; $b)\ (n-2)/(n+3)$; $c)\ (n+1)/(3n-4)$; $d)\ (3n+2)/(13n+7)$.

2) Déterminer les valeurs possibles de l'entier relatif n tel que :

- $n+2 \mid n+15$
- $n-4 \mid 3n-17$
- $\dfrac{3n^2+15n+19}{n+1} \in \mathbb{N}$

Exercice 3

1) Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

$a)\ n^2+n=20$; $b)\ n^2+2n=35$; $c)\ (n+2)(n-1)=14$;

2) Soient x et y deux entiers relatifs tels que : $xy-5x-5y-7=0$

a) Montrer que : $xy-5x-5y-7=0 \Leftrightarrow (x-5)(y-5)=32$

b) Déterminer les entiers naturels x et y tels que $xy-5x-5y-7=0$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$a)\ (2x-1)(3y-2)=20$; $b)\ (2x+y)(5x-3y)=7$; $c)\ x^2-y^2=5$; $d)\ 4x^2-9y^2=5$.

Exercice 5

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$a)\ n\wedge(n+1)=1$; $b)\ n\wedge(2n+1)=1$; $c)\ (3n+2)\wedge(5n+3)=1$; $d)\ (11x+3)\wedge(7y+2)=1$.

$e)\ (n^2+n+1)\wedge(n+1)=1$; $f)\ (5n+3)\wedge(20n^2+27n+10)=1$.

2) Soient p et q deux entiers naturels tels que : $p\wedge q=1$.

Montrer que : $(p+q)\wedge p=1$ et $(p-q)\wedge q=1$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que : $n\geq 2$. Déterminer les valeurs de n, dans chacun des cas suivants :

$a)\ 17\equiv 9[n]$; $b)\ 25\equiv -11[n]$; $c)\ 97\equiv 84[n]$; $d)\ 127\equiv 97[n]$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, les systèmes suivants :

$a)\ \begin{cases} x\wedge y=6 \\ xy=432 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} x\wedge y=5 \\ x+y=60 \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} x\wedge y=12 \\ x+y=96 \end{cases}$; $d)\ \begin{cases} x\wedge y=11 \\ xy=165 \end{cases}$

Exercice 7

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a>b$. Leur somme est égale à 444 et la division euclidienne de a par b a pour quotient 4 et pour reste 24. Déterminer a et b.

Exercice 8

1) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a\leq b$ et vérifiant : $(a\vee b)-(a\wedge b)=7$.

2) Déterminer les entiers naturels a et b qui vérifient : $2(a \vee b) - 7(a \wedge b) = 11$.

3) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a \leq b$ et vérifiant : $(a \vee b) - 3(a \wedge b) = 4$.

Exercice 9

Déterminer les valeurs de l'entier relatif x dans chacun des cas suivants :

$a)$ $18 \equiv x[17]$; $b)$ $x \equiv 121[29]$ et $-31 < x < 0$; $c)$ $x \equiv 191[17]$ et $0 < x < 18$.

Exercice 10

1) Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de 25 et 139^{44}.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

a) Le nombre A défini par A $= 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ set divisible par 7.

b) Le nombre B défini par B $= 3^{n+3} - 4^{4n+2}$ set divisible par 11.

Exercice 11

1) Démontrer que $3^5 \equiv 1[11]$ puis en déduire que pour tout couple d'entiers naturels (k, r), on a : $3^{5k+r} \equiv 3^r [11]$

2) Soit n un entier naturel. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 ?

3) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a : $3^n + 7 \equiv 0[11]$?

4) Déterminer le reste de la division euclidienne de 322^{448} par 11.