Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la parité de la fonction f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x, puis étudier le signe de $f'(x)$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Etudier la concavité de la courbe (C_f) et déterminer son point d'inflexion.

6) Construire la courbe (C_f).

Exercice 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la courbe (C_f) admet un centre de symétrie au point d'abscisse 1.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser son tableau de variations

4) a) Montrer que pour tout x de D_f, on a : $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

b) Etudier la concavité de la courbe (C_f).

c) La courbe (C_f) admet-elle un point d'inflexion ?

5) a) Calculer $f'(0)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Construire la courbe (C_f).

Exercice 3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3+27}{2x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$, est une asymptote oblique à la courbe (C_f) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

3) a) Montrer que pour tout x de D_f, on a : $x^3 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 3$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Construire la courbe $\left(C_f\right)$.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(2x)-\cos x$.

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que la fonction f est périodique de période 2π.

b) Montrer que la fonction f est paire.

c) Montrer qu'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi]$.

2) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=2\sin x\left(1-2\cos x\right)$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,\pi]$.

3) a) Calculer $f'(0)$ et $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et interpréter ces résultats graphiquement.

b) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ sur l'intervalle $[-\pi,2\pi]$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=x-\sqrt{x-1}$.

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Etudier la branche infinie de la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f-\{1\}$ et montrer que : $f'(x)=\dfrac{4x-5}{2\sqrt{x-1}\left(2\sqrt{x-1}+1\right)}$.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse $x_1=5$.

b) Construire la courbe $\left(C_f\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$.

On désigne par $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) a) Montrer que pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite d'équation $y=-2x$ est une asymptote oblique à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty,-1\right[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. La fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_0=-1$?. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \left]1,+\infty\right[$, on a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. La fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_1=1$?. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

6) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f-\{-1,1\}$

b) Montrer que : $f'(x)>0$ si $x \in \left]1,+\infty\right[$ *et* $f'(x)<0$ si $x \in \left]-\infty,-1\right[$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7) Construire la courbe $\left(C_f\right)$