Exercice 1

On pose : $\left(\forall(x;y)\in\left]-1;1\right[\times\left]-1;1\right[\right);\ x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1/ Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\left]-1;1\right[$

2/ Montrer que la loi de composition interne $*$ est associative dans $\left]-1;1\right[$

3/ Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\left]-1;1\right[$

4/ Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e qu'il faut déterminer

5/ Montrer que tout élément x de $\left]-1;1\right[$ admet un élément symétrique x^{-1} pour la loi $*$ dans $\left]-1;1\right[$, que l'on déterminera

Exercice 2

On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation T par : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2\right);\ x\,T\,y=x+y+2$

1/ Montrer que T est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$
2/ Montrer que T est associative dans $\mathbb{Z}$
3/ Montrer que T est commutative dans $\mathbb{Z}$
4/ Montrer que T admet un élément neutre e dans $\mathbb{Z}$ qu'il faut déterminer
5/ Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}$ admet un élément symétrique dans $\mathbb{Z}$ pour la loi T ,que l'on déterminera

Exercice 3

On pose : $\left(\forall(x;y)\in\left]0;1\right[\times\left]0;1\right[\right);\ x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

1/ Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\left]0;1\right[$

2/ Montrer que $*$ est associative dans $\left]0;1\right[$

3/ Montrer que $*$ est commutative dans $\left]0;1\right[$

4/ Montrer que $*$ admet un élément neutre e dans $\left]0;1\right[$ que l'on déterminera

5/ Montrer que tout élément de $\left]0;1\right[$ admet un élément symétrique pour $*$ dans $\left]0;1\right[$, que l'on déterminera

Exercice 4

On pose : $\left(\forall(x;y)\in\left]1;+\infty\right[\times\left]1;+\infty\right[\right);\ x\perp y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$

Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $\left]1;+\infty\right[$

Exercice 6

On pose : $\forall(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4;\ (x;y)\perp(z;t)=(x+z+xz;y+t)$

1/ Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^2$

2/ Montrer que la loi $\perp$ est associative dans $\mathbb{R}^2$

3/ Montrer que la loi $\perp$ est commutative dans $\mathbb{R}^2$

4/ Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre $(e;e')$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera

5/ Déterminer l'ensemble des éléments ayant un symétrique dans $\left(\mathbb{R}^2;\perp\right)$.

Exercice 7

Soit $(G,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$

Tel que : $\forall(x;y)\in G^2;\ x^2*y=y \text{ et } y*x^2=y\quad\left(\text{où } x^2=x*x\right)$

1/ Montrer que $(G,*)$ admet un élément neutre e

2/ Montrer que $\forall x \in G;\ x * x = e$

3/ En déduire que tout élément x de G admet un symétrique dans $(G,*)$

Exercice 8

On munit un ensemble non vide E d'une loi de composition interne T telle que :

$\forall (x;y) \in E^2;\ x\,T\,(x\,T\,y) = (y\,T\,x)\,T\,x = y$

Montrer que la loi T est commutative