I – Dénombrement et analyse combinatoire

1 – Ensembles finis

Vocabulaire et notation

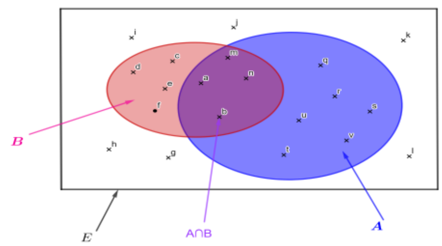
- Un ensemble est une collection d'objets distincts. Ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble. Autrement dit : si x est un objet d'un ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$; En revanche si x n'est pas un élément de E on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.
- Un ensemble E est dit vide s'il ne contient aucun élément, on le note $\varnothing$
- Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est aussi un élément de F

Intersection de deux parties d'un ensemble

L'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B, on note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x \,/\, x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\}$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{a, b, m, n\}$$

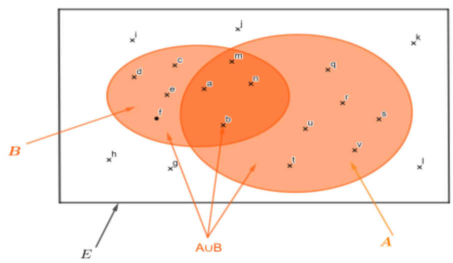


Réunion de deux parties d' un ensemble

La réunion de deux partie A et B d'un ensemble E est l'ensemble de tous les éléments de A et de B, on note $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \Omega \,/\, x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{a, b, c, d, e, f, m, n, q, r, s, t, u, v\}$$

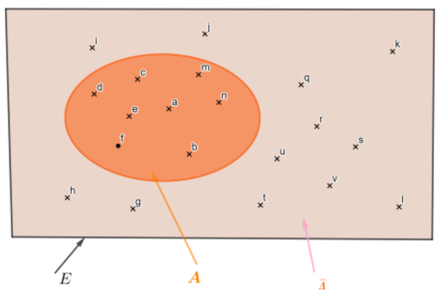


Complémentaire d'une partie dans un ensemble

Le complémentaire d'une partie A dans un ensemble Ω est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on note C_{Ω}^{A} ou $\bar{\mathrm{A}}$

$$\bar{\mathrm{A}} = \{x \in \Omega \,/\, x \notin \mathrm{A}\}$$

$$\bar{\mathrm{A}} = \{g, h, i, j, k, l, q, r, s, t, u, v\}$$



Définition 1

Un ensemble E est dit fini s'il contient un nombre fini d'éléments.
On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E, on le note $\mathrm{card}\,\mathrm{E}$

Exemple

$\mathrm{E} = \{1, a, 2, b, 3, c\}$ donc $\mathrm{card}\mathrm{E} = 6$.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles finis.

- $\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}\,\mathrm{E} + \mathrm{card}\,\mathrm{F} - \mathrm{card}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$
- Si $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}\,\mathrm{E} + \mathrm{card}\,\mathrm{F}$
- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on a : $\mathrm{card}\,\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{card}\,\mathrm{E} - \mathrm{card}\,\mathrm{A}$

Définition 2

Soit E un ensemble fini tel que card E $= n$ $(n \in \mathbb{N})$.

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Et on a card $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.

Autrement dit : $\operatorname{card}\mathcal{P}(\mathrm{E}) = 2^{\operatorname{card}\mathrm{E}}$

Exemple

Soit $E = \{a,b,c,1\}$. On a, alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{1\};\{a,b\};\{a,c\};\{a,1\};\{b,c\};\{b,1\};\{c,1\};\{a,b,c\};\{a,b,1\};\{a,c,1\};\{b,c,1\};\{a,b,c,1\}\}$$

Et $card\,\mathcal{P}(E) = 2^4 = 16$.

Définition 3

Soient E et F deux ensembles non vides.

Le produit cartésien des ensembles E et F, dans cet ordre, est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$, on le note $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Autrement dit : $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(x, y) / x \in \mathrm{E} \text{ et } y \in \mathrm{F}\}$

Remarque

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ on notera $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ par E^2. E^2 est appelé le carré cartésien de l'ensemble E

Exemple

On considère les ensembles $\mathrm{E} = \{2,4,6\}$ et $\mathrm{F} = \{a,b\}$.

On a $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(2,a);(2,b);(4,a);(4,b);(6,a);(6,b)\}$ et

$$E^2 = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

2 – Principe fondamental du dénombrement

Principe

On considère une expérience qui comporte p épreuves où $p \in \mathbb{N}^*$, telle que :

L'épreuve n°1 admet n_1 issues

L'épreuve n°2 admet n_2 issues

...

L'épreuve n° p admet n_p issues

Alors cette expérience admet $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ issues

Exemple

On considère l'expérience suivante :
On jette en l'air une pièce de monnaie et on note la face obtenue F ou P
Et on jette un dé cubique ayant 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro obtenu
Déterminer le nombre de possibilités.

Réponse

Cette expérience est constituée de deux épreuves : lancer une pièce à 2 faces et lancer un dé à 6 faces, alors le nombre de possibilité de cette expérience est $2 \times 6 = 12$

3 – Les arrangements

a – Les arrangements sans répétition

Définition

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{card}\mathrm{E} = n$ et $1 \le p \le n$.

Un arrangement sans répétition de p éléments parmi les n éléments de E est un p - uplet d'éléments de E distincts deux à deux. On l'appelle aussi un p -arrangement parmi n.

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $1 \le p \le n$.

Le nombre des p-arrangements sans répétition de n objets est $A_n^p = n(n-1)(...)(n-p+1)$

Exemple

- Les arrangements sans répétition de 2 éléments de l'ensemble $E = \{a,b,c\}$ sont les couples $(a,b);(a,c);(b,c);(b,a);(c,a);(c,b)$ leur nombre est $A_3^2 = 3\times 2 = 6$
- Combien de nombres de 4 chiffres distincts deux à deux on peut constituer avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. ?
  Chaque nombre ainsi composé est un arrangement sans répétition de 4 parmi 10, donc le nombre de ces nombres est $A_{10}^4 = 10\times 9\times 8\times 7 = 5040$

Remarque

- Pour calculer le nombre A_n^p on utilise la calculatrice [en insérant n puis la touche nPr puis p et Enter]
- L'ordre est très important pour les arrangements
- Dans les arrangements sans répétition il n'y a pas de répétition
- $1 \le p \le n$

b – Les arrangements avec répétition ou listes

Définition

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{card}\, E = n$.

Un arrangement avec répétition de p éléments parmi les n éléments de E est un p - uplet d'éléments de E..

On l'appelle aussi une p -liste parmi n .

Proposition

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{card}\, E = n$.

Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi les n éléments de E est n^p

Exemple

- Les arrangements avec répétition de 2 éléments de l'ensemble $E = \{a,b,c\}$ sont les couples $(a,a);(a,b);(a,c);(b,b);(b,c);(b,a);(c,a);(c,b)(c,c)$ leur nombre est $3^2 = 9$
- Combien de nombres de 4 chiffres on peut constituer avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
  Chaque nombre ainsi composé est un arrangement avec répétition de 4 parmi 10, donc le nombre de ces nombres est $10^4 = 10000$

Remarque

- L'ordre est très important pour les arrangements avec répétition
- Dans les arrangements avec répétition il y a répétition
- Il n'y a pas de condition sur le choix de p .

4 – Les permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).

Une permutation de E est un n -arrangement sans répétition d'éléments de E.

Proposition

Le nombre des permutations de n éléments est : $A_n^n = n\times(n-1)\times(...)\times 2\times 1$

On note ce nombre $n!$ et on lit factorielle n. On a alors:

$$n! = n\times(n-1)\times(...)\times 2\times 1$$

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $1 \le p \le n$. Alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Les permutations des éléments de l'ensemble $\{a,b,c\}$ sont les triplets

$(a,b,c);(a,c,b);(b,a,c);(b,c,a);(c,a,b);(c,b,a)$ et leur nombre est $3! = 3\times 2\times 1 = 6$

Définition (Factorielle)

Le nombre $n!$ se lit « **factorielle** n » et est défini par :

$0! = 1$; $1! = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $n! = n\times(n-1)\times(...)\times 2\times 1$

Exemple

Calculer $5!$; $9!$ A_6^3 ; A_{10}^7

Remarque

Le nombre $n!$ peut être calculer à l'aide de la calculatrice et si n n'est pas grand on peut utiliser le triangle de Pascal pour calculer $n!$.

5 – Les combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E contenant p éléments distincts de E.

Remarque

- La différence entre une p-combinaison et un p-arrangement est que dans un p-arrangement on tient compte de l'ordre, alors que pour une p-combinaison on ne tient pas compte de l'ordre.
- L'ordre n'est pas important pour les combinaisons
- Dans les combinaisons il n'y a pas de répétition
- $1 \leq p \leq n$

Proposition 1

Le nombre des p-combinaisons de n objets, noté C_n^p et appelé coefficient binomial, est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

Les combinaisons de deux éléments de l'ensemble $\{a,b,c\}$ sont les parties $\{a,b\};\{a,c\};\{b,c\}$

Remarque

Pour calculer le nombre C_n^p on utilise la calculatrice [en insérant n puis la touche nCr puis p et Enter]

Proposition 2

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. On a :

- $C_n^0 = 1$ et $A_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$ et $A_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$ et $A_n^{n-1} = n!$
- $C_n^n = 1$ et $A_n^n = n!$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- Si $p \geq 1$, on a : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$ (Formule de Pascal)

6 – Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6

0	$C_0^0=1$						
1	$C_1^0=1$	$C_1^1=1$					
2	$C_2^0=1$	$C_2^1=2$	$C_2^2=1$				
3	$C_3^0=1$	$C_3^1=3$	$C_3^2=3$	$C_3^3=1$			
4	$C_4^0=1$	$C_4^1=4$	$C_4^2=6$	$C_4^3=4$	$C_4^4=1$		
5	$C_5^0=1$	$C_5^1=5$	$C_5^2=10$	$C_5^3=10$	$C_5^4=5$	$C_5^5=1$	
6	$C_6^0=1$	$C_6^1=6$	$C_6^2=15$	$C_6^3=20$	$C_6^4=15$	$C_6^5=6$	$C_6^6=1$

7 – Formule du binôme de Newton

Proposition 1 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}\times b + C_n^2 a^{n-2}\times b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a\times b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} a^k \times b^{n-k}$$

Corollaire

- Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$, alors : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ et $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x)^k$
- Soit $n\in\mathbb{N}$, alors : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

8 – Types de tirage

Tirage simultané

E un ensemble fini tel que $\text{card}\,E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel tel que $p\le n$.

Lorsqu'on **tire simultanément** p éléments parmi les n éléments de E, chaque issue est une p - combinaison parmi n. Donc le nombre de possibilités est C_n^p

Tirage successif sans remise

E un ensemble fini tel que $\text{card}\,E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel tel que $p\le n$.

Lorsqu'on **tire successivement sans remise** p objets parmi les n éléments de E, chaque possibilité est un p-arrangement parmi n. Donc le nombre de possibilités est A_n^p

Tirage successif avec remise

E un ensemble fini tel que $\text{card}\,E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel quelconque.

.Lorsqu'on **tire successivement avec remise** p objets parmi les n éléments de E, chaque possibilité est un élément de E^p. Donc le nombre de possibilité est n^p

Exemples

Une urne contient 10 billes : 5 blanches, 3 rouges et 2 vertes indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard 3 billes de l'urne.

a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?

b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?

c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?

2) On tire successivement au hasard sans remise 3 billes de l'urne.

a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?

b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?
c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?

3) On tire successivement au hasard avec remise 3 billes de l'urne.
a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?
c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?

II – Calcul de probabilité

1 – Vocabulaires

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle des issues possibles sera réalisée.
- L'univers Ω est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. On va nous restreindre aux cas où l'univers est fini et non vide : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ et $\text{card}\,\Omega=n$.
- Toute partie de Ω est appelée un événement
- Les singletons $\{\omega_k\}$ sont appelés des événements élémentaires
- Ω est appelé l'événement certain
- $\varnothing$ est appelé l'événement impossible.
- Si A et B sont deux événements de Ω, l'événement $A\cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
- Si A et B sont deux événements de Ω, l'événement $A\cap B$ est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés.
- Si A est un événement de Ω, l'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est la partie de Ω constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.
- Deux événements de Ω, A et B sont dits incompatibles si $A\cap B=\varnothing$.

2 – Probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire

a – Probabilité d'un événement

Définition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,...,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire tel que $card\,\Omega=n$.

- En répétant cette expérience N fois dans les mêmes conditions. Si n_i est le nombre de fois que l'on obtienne l'issue ω_i. Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ que l'on note $p_i=p(\{w_i\})=p(\omega_i)=\frac{n_i}{N}$
- On a : $\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+...+p_n=1$
- Si A est un événement tel que $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},...,\omega_{k_s}\}$ où $1\le k_1<k_2<...<k_s\le n$, alors : la probabilité de A est : $p(A)=p(\omega_{k_1})+p(\omega_{k_2})+...+p(\omega_{k_s})$

Propriétés

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et soit p une probabilité sur Ω.

- $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)):0\le p(A)\le 1$ ..
- $p(\Omega)=1$ et $p(\varnothing)=0$.
- $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)): A\subset B\Rightarrow p(A)\le p(B)$.
- $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)): A\cap B=\varnothing\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)): p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)): p(\overline{A})=1-p(A)$

b – Hypothèse d'équiprobabilité

Définition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,...,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

On dit qu'on a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité c'est-à-dire

$$p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{card\,\Omega}.$$

Proposition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,...,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. On désigne par p une probabilité sur l'univers Ω qui vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité. Alors : $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(A)=\dfrac{card\,A}{card\,\Omega}$

Remarques

On a équiprobabilité dans les cas suivants :

- Lorsqu'on un dé non truqué
- Lorsqu'on a une pièce de monnaie non truquée
- Lorsque les boules ou les billes ou les jetons sont indiscernables au toucher
- Lorsqu'on le dit dans l'énoncé
- ...

Exemple

Une urne U contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 noires, 4 vertes et 5 blanches.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
1) Déterminer le nombre des tirages possibles.
2) Soit A l'événement : « Obtenir 3 boules de même couleur »
B l'événement : « Obtenir 3 boules de couleurs différentes deux à deux »
Calculer $p(A)$ et $p(B)$

3 – Probabilité conditionnelle

a – Probabilité conditionnelle

Définition

Soit p une probabilité sur un univers Ω. Soient A et B deux événements tels que : $p(A)\neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est notée $p_A(B)$ ou $p(B\backslash A)$ et est définie par : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

Proposition

Soit p une probabilité sur un univers Ω.

- ★ Si A est un événement tel que $p(A)\neq 0$, alors $p_A(A)=1$.
- ★ Si A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, alors :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B) \quad \text{et} \quad p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$$

- ★ Si A et B deux événements incompatibles $(A\cap B=\varnothing)$ tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, alors :

$$p_A(B)=0 \quad \text{et} \quad p_B(A)=0$$

b – Probabilités totales

Définition

- Soient A et B deux parties non vides de Ω. On dit que A et B forment une partition de parties non vides de Ω si et seulement si : $A\cap B\neq\varnothing$ et $A\cup B=\Omega$
- Plus généralement, Si $A_1,;A_2;...;A_n$ sont des parties non vides d'un ensemble Ω. On dit que $A_1,;A_2;...;A_n$ forment une partition de Ω si et seulement si : $A_i\cap A_j=\varnothing$ si $i\neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{i=n}A_i=\Omega$.

Remarque

Soit A un événement de Ω. Alors A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω car : $A\cap\bar{A}=\varnothing$ et $A\cup\bar{A}=\Omega$.

Proposition

★ Soit A un événement de Ω tel que $p(A)\neq 0$. Alors :

$$(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(B)=p(A\cap B)+p(\bar{A}\cap B)=p(A)\times p_A(B)+p(\bar{A})\times p_{\bar{A}}(B)$$

★ Soient $A_1,;A_2;\dots;A_n$ des événements de Ω qui forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(B)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i\cap B)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\times p_{A_i}(B)$$

Remarque

Si A, B et C forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall E\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(E)=p(A\cap E)+p(B\cap E)+p(C\cap E)=p(A)\times p_A(E)+p(B)\times p_B(E)+p(C)\times p_C(E)$$

Formule de Bayes

Soient $A_1,;A_2;\dots;A_n$ des événements de Ω qui forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall i\in\{1,2,3,\dots,n\})(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : p_B(A_i)=\frac{p(A_i)\times p_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n}p(A_k)\times p_{A_{i_k}}(B)}$$

4 – Indépendance de deux évènements

Définition

Soient A et B deux événements de Ω.

On dit que A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Proposition

Soient A et B deux événements de Ω.

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p_A(B)=p(B)$ ou $p_B(A)=p(A)$

5 – Variables aléatoires

a – Définition et notations

Définition 1

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Toute application définie de Ω vers $\mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire. Elle est notée habituellement par les lettres **X** , **Y** , **Z** ...

Notations et vocabulaire

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω.

★ On note par $\mathbf{X}(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par **X** c'est-à-dire l'ensemble des images par **X** des éléments de Ω. On pose $\mathbf{X}(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

★ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(X=x)=\{w\in\Omega / X(w)=x\}$

★ Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(X\leq x)=\{w\in\Omega / X(w)\leq x\}$

Exemple

On considère l'expérience suivante : On jette une pièce de monnaie non truquée 3 fois en l'air, en numérotant après chaque lancer la face apparente de la pièce. Après chaque lancer si on obtient la face P on gagne 5 dh et si on obtient la face F on perd 2 dh. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le gain algébrique.

1) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b – loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que $\mathbf{X}(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

La loi de probabilité de **X** est l'application définie de $\mathbf{X}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ par : $x_i\mapsto p(X=x_i)$

Règle

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω .
Pour déterminer la loi de probabilité de **X**, on devrait :

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par **X** : $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Calculer les probabilités $p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

La loi de probabilité de **X** est habituellement représentée dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

c – Espérance mathématique – Variance – Ecart-type

Définition

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

- L'espérance mathématique de **X** est : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$
- La variance de **X** est : $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$
- L'écart-type de **X** est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Proposition

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

Alors : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i\right)^2$

Remarques

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs qu'elle prend.
- Lorsqu'une variable aléatoire est définie comme un gain algébrique lors d'un jeu, l'espérance représente le gain moyen après un très grand nombre de parties.
  Ainsi une espérance nulle indique un jeu équitable, une espérance négative indique un jeu défavorable au joueur et une espérance positive indique un jeu favorable au joueur.

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

A : « tirer trois boules de même couleur »

B : « tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux »

Montrer que : $p(A)=\dfrac{3}{44}$ *et* $p(B)=\dfrac{3}{11}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent les boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$

Théorème

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω . Alors :

- ★ $(\forall\alpha\in\mathbb{R}) : E(\alpha X)=\alpha E(X)$
- ★ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- ★ $V(\alpha X)=\alpha^2 V(X)$

6 – Loi binomiale

Définition

Soit A un événement dans un expérience aléatoire tel que $p(A)\neq 0$. On pose $p(A)=p$. On répète cette expérience n fois indépendamment.
Soit **X** la variable aléatoire qui associe à chaque possibilité le nombre de fois que l'événement A est réalisé.
On dit que la variable aléatoire **X** suit une loi binomiale de paramètres n et p

Proposition

Soit **X** une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

- ★ $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$ pour tout $k\in\{1,2,3,\dots,n\}$
- ★ L'espérance mathématique de **X** est : $E(X)=n\times p$
- ★ La variance de **X** est : $V(X)=n\times p\times(1-p)$
- ★ L'écart-type de **X** est : $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$