1 – Ensembles finis

Vocabulaire et notation

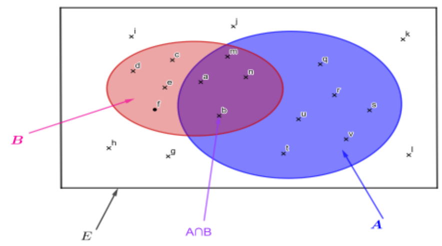
- Un ensemble est une collection d'objets distincts. Ces objets s'appellent les éléments de cet ensemble. Autrement dit : si x est un objet d'un ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$; En revanche si x n'est pas un élément de E on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.
- Un ensemble E est dit vide s'il ne contient aucun élément, on le note $\varnothing$
- Un ensemble E est inclus dans un ensemble F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est aussi un élément de F

Intersection de deux parties d'un ensemble

L'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B, on note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x / x \in \mathrm{A} \ et \ x \in \mathrm{B}\}$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{a,b,m,n\}$$

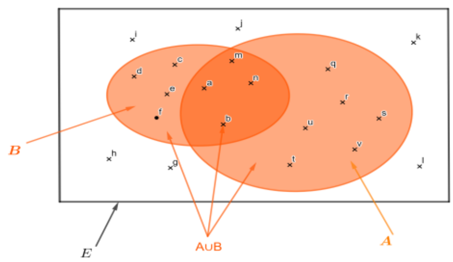


Réunion de deux parties d' un ensemble

La réunion de deux partie A et B d'un ensemble E est l'ensemble de tous les éléments de A et de B, on note $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \Omega / x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\}$$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{a,b,c,d,e,f,m,n,q,r,s,t,u,v\}$$

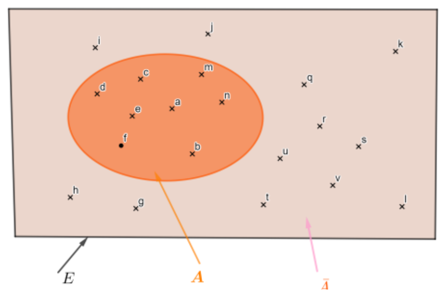


Complémentaire d'une partie dans un ensemble

Le complémentaire d'une partie A dans un ensemble Ω est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on note C_{Ω}^{A} ou $\bar{\mathrm{A}}$

$$\bar{\mathrm{A}} = \{x \in \Omega / x \notin \mathrm{A}\}$$

$$\bar{\mathrm{A}} = \{g,h,i,j,k,l,q,r,s,t,u,v\}$$



Définition 1

Un ensemble E est dit fini s'il contient un nombre fini d'éléments.
On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E, on le note $\mathrm{card}\,\mathrm{E}$

Exemple

$\mathrm{E} = \{1, a, 2, b, 3, c\}$ donc $\mathrm{card} \mathrm{E} = 6$.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles finis.

- $\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}\,\mathrm{E} + \mathrm{card}\,\mathrm{F} - \mathrm{card}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$
- Si $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$, on a : $\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = \mathrm{card}\,\mathrm{E} + \mathrm{card}\,\mathrm{F}$
- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on a : $\mathrm{card}\,\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{card}\,\mathrm{E} - \mathrm{card}\,\mathrm{A}$

Définition 2

Soit E un ensemble fini tel que card E $= n$ $(n \in \mathbb{N})$.

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Et on a card $\mathcal{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.

Autrement dit : $\text{card}\,\mathcal{P}(\text{E}) = 2^{\text{card}\,\text{E}}$

Exemple

Soit $E = \{a,b,c,1\}$. On a, alors :

$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\{a\};\{b\};\{c\};\{1\};\{a,b\};\{a,c\};\{a,1\};\{b,c\};\{b,1\};\{c,1\};\{a,b,c\};\{a,b,1\};\{a,c,1\};\{b,c,1\};\{a,b,c,1\}\}$

Et $card\,\mathcal{P}(E) = 2^4 = 16$.

Définition 3

Soient E et F deux ensembles non vides.

Le produit cartésien des ensembles E et F, dans cet ordre, est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x \in \text{E}$ et $y \in \text{F}$, on le note $\text{E} \times \text{F}$.

Autrement dit : $\text{E} \times \text{F} = \{(x,y) \,/\, x \in \text{E} \text{ et } y \in \text{F}\}$

Remarque

Si $\text{E} = \text{F}$ on notera $\text{E} \times \text{F}$ par E^2. E^2 est appelé le carré cartésien de l'ensemble E

Exemple

On considère les ensembles $\text{E} = \{2,4,6\}$ et $\text{F} = \{a,b\}$.

On a $\text{E} \times \text{F} = \{(2,a);(2,b);(4,a);(4,b);(6,a);(6,b)\}$ et

$E^2 = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$

2 – Principe fondamental du dénombrement

Principe

On considère une expérience qui comporte p épreuves où $p \in \mathbb{N}^*$, telle que :

L'épreuve n°1 admet n_1 issues

L'épreuve n°2 admet n_2 issues

...

L'épreuve n° p admet n_p issues

Alors cette expérience admet $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ issues

Exemple

On considère l'expérience suivante :

On jette en l'air une pièce de monnaie et on note la face obtenue F ou P

Et on jette un dé cubique ayant 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le numéro obtenu

Déterminer le nombre de possibilités.

Réponse

Cette expérience est constituée de deux épreuves : lancer une pièce à 2 faces et lancer un dé à 6 faces, alors le nombre de possibilité de cette expérience est $2 \times 6 = 12$

3 – Les arrangements

1 – Les arrangements sans répétition

Définition

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{card}\,\text{E} = n$ et $1 \le p \le n$.

Un arrangement sans répétition de p éléments parmi les n éléments de E est un p - uplet d'éléments de E distincts deux à deux. On l'appelle aussi un p -arrangement parmi n.

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $1 \le p \le n$.

Le nombre des p-arrangements sans répétition de n objets est $\text{A}_n^p = n(n-1)(\ldots)(n-p+1)$

Exemple

- Les arrangements sans répétition de 2 éléments de l'ensemble $E=\{a,b,c\}$ sont les couples $(a,b);(a,c);(b,c);(b,a);(c,a);(c,b)$ leur nombre est $A_3^2=3\times 2=6$
- Combien de nombres de 4 chiffres distincts deux à deux on peut constituer avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
  Chaque nombre ainsi composé est un arrangement sans répétition de 4 parmi 10, donc le nombre de ces nombres est $A_{10}^4=10\times 9\times 8\times 7=5040$

Remarque

- Pour calculer le nombre A_n^p on utilise la calculatrice [en insérant n puis la touche nPr puis p et Enter]
- L'ordre est très important pour les arrangements
- Dans les arrangements sans répétition il n'y a pas de répétition
- $1\le p\le n$

2 – Les arrangements avec répétition ou listes

Définition

Soit E un ensemble et $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{card}E=n$.
Un arrangement avec répétition de p éléments parmi les n éléments de E est un p - uplet d'éléments de E..
On l'appelle aussi une p -liste parmi n .

Proposition

Soit E un ensemble et $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{card}E=n$.
Le nombre des arrangements avec répétition de p éléments parmi les n éléments de E est n^p

Exemple

- Les arrangements avec répétition de 2 éléments de l'ensemble $E=\{a,b,c\}$ sont les couples $(a,a);(a,b);(a,c);(b,b);(b,c);(b,a);(c,a);(c,b)(c,c)$ leur nombre est $3^2=9$
- Combien de nombres de 4 chiffres on peut constituer avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
  Chaque nombre ainsi composé est un arrangement avec répétition de 4 parmi 10, donc le nombre de ces nombres est $10^4=10000$

Remarque

- L'ordre est très important pour les arrangements avec répétition
- Dans les arrangements avec répétition il y a répétition
- Il n'y a pas de condition sur le choix de p .

4 – Les permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n\in\mathbb{N}^*$).
Une permutation de E est un n -arrangement sans répétition d'éléments de E.

Proposition

Le nombre des permutations de n éléments est : $A_n^n=n\times(n-1)\times(\ldots)\times 2\times 1$
On note ce nombre $n!$ et on a :

$$n!=n\times(n-1)\times(\ldots)\times 2\times 1$$

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $1\le p\le n$. Alors :

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

Les permutations des éléments de l'ensemble $\{a,b,c\}$ sont les triplets

$(a,b,c);(a,c,b);(b,a,c);(b,c,a);(c,a,b);(c,b,a)$ et leur nombre est $3! = 3\times2\times1 = 6$

Définition (Factorielle)

Le nombre $n!$ se lit « **factorielle** n » et est défini par :

$0! = 1$; $1! = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $n! = n\times(n-1)\times(...)\times2\times1$

Exemple

Calculer $5!$; $9!$ A_6^3 ; A_{10}^7

5 – Les combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E contenant p éléments distincts de E.

Remarque

- La différence entre une p-combinaison et un p-arrangement est que dans un p-arrangement on tient compte de l'ordre, alors que pour une p-combinaison on ne tient pas compte de l'ordre.
- L'ordre n'est pas important pour les combinaisons
- Dans les combinaisons il n'y a pas de répétition
- $1 \leq p \leq n$

Proposition 1

Le nombre des p-combinaisons de n objets, noté C_n^p, est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple

Les combinaisons de deux éléments de l'ensemble $\{a,b,c\}$ sont les parties $\{a,b\};\{a,c\};\{b,c\}$

Remarque

Pour calculer le nombre C_n^p on utilise la calculatrice [en insérant n puis la touche nCr puis p et Enter]

Proposition 2

Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$. On a :

- $C_n^0 = 1$ et $A_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$ et $A_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$ et $A_n^{n-1} = n!$
- $C_n^n = 1$ et $A_n^n = n!$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- Si $p \geq 1$, on a : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$ (Formule de Pascal)

6 – Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	$C_0^0 = 1$						
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$					
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$				

3	$C_3^0=1$	$C_3^1=3$	$C_3^2=3$	$C_3^3=1$			
4	$C_4^0=1$	$C_4^1=4$	$C_4^2=6$	$C_4^3=4$	$C_4^4=1$		
5	$C_5^0=1$	$C_5^1=5$	$C_5^2=10$	$C_5^3=10$	$C_5^4=5$	$C_5^5=1$	
6	$C_6^0=1$	$C_6^1=6$	$C_6^2=15$	$C_6^3=20$	$C_6^4=15$	$C_6^5=6$	$C_6^6=1$

7 – Formule du binôme de Newton

Proposition 1 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}\times b + C_n^2 a^{n-2}\times b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a\times b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Corollaire

- Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}^*$, alors : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ et $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-x)^k$
- Soit $n\in\mathbb{N}$, alors : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

8 – Types de tirage

- Tirage simultané

E un ensemble fini tel que $\operatorname{card} E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel tel que $p\le n$.
Lorsqu'on **tire simultanément** p éléments parmi les n éléments de E, chaque issue est une p-combinaison parmi n. Donc le nombre de possibilités est C_n^p

- Tirage successif sans remise

E un ensemble fini tel que $\operatorname{card} E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel tel que $p\le n$.
Lorsqu'on **tire successivement sans remise** p objets parmi les n éléments de E, chaque possibilité est un p-arrangement parmi n. Donc le nombre de possibilités est A_n^p

- Tirage successif avec remise

E un ensemble fini tel que $\operatorname{card} E = n$ où $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier naturel quelconque.
.Lorsqu'on **tire successivement avec remise** p objets parmi les n éléments de E, chaque possibilité est un élément de E^p. Donc le nombre de possibilité est n^p

Exemples

Une urne contient 10 billes : 5 blanches, 3 rouges et 2 vertes indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard 3 billes de l'urne.
   a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
   b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?
   c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?
2) On tire successivement au hasard sans remise 3 billes de l'urne.
   a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
   b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?
   c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?
3) On tire successivement au hasard avec remise 3 billes de l'urne.
   a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
   b) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de même couleur ?
   c) Quelle est le nombre de tirages où toutes les billes sont de couleurs différentes ?