



I - Parité et périodicité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f et $T \in \mathbb{R}^{+*}$

- ▶ Dire que f est paire signifie que : $(\forall x \in D_f); \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- ▶ Dire que f est impaire signifie que : $(\forall x \in D_f); \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
- ▶ Dire que f est périodique de période T (ou T -périodique) signifie que :
 $(\forall x \in D_f) \begin{cases} x+T \in D_f \text{ et } x-T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Proposition

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Si f est paire, alors sa courbe (C_f) admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie
- Si f est impaire, alors sa courbe (C_f) admet l'origine du repère pour centre de symétrie
- Si f est T -périodique ($T \in \mathbb{R}^{+*}$), alors sa courbe (C_f) est invariante par translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$

Exemples :

| | | |
|--|---|---|
| $f(x) = x^2$ $D_f = \mathbb{R}; f$ est paire | $g(x) = x^3$ $D_g = \mathbb{R}; g$ est impaire | $h(x) = \cos x + \sin x$. $D_h = \mathbb{R}$; h est périodique de période $T = 2\pi$ |
| | | |
| (C_f) admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie | (C_g) admet O l'origine du repère pour centre de symétrie | (C_h) est invariable par la translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$ |

II - Éléments de symétrie

1. Axe de symétrie

Propositions

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Si $(\forall x \in D_f); \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)



Remarques :

1/ Le réel a peut ne pas appartenir à D_f .

2/ Pour montrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) on peut

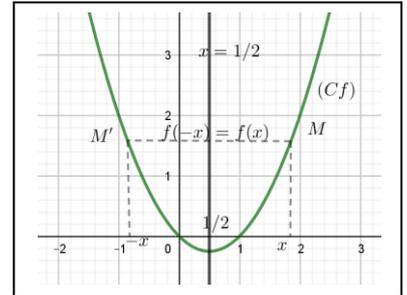
aussi montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : a + x \in D_f$ on a $\begin{cases} a - x \in D_f \\ f(a + x) = f(a - x) \end{cases}$

Exemples :

$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) .

En effet on a : $D_f = \mathbb{R}$. Soit $x \in D_f$ alors $2a - x = 1 - x \in D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{et } f(2a - x) = f(1 - x) &= \frac{(1 - x)^2 - (1 - x) - 2}{(1 - x)^2 - (1 - x) + 1} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} = f(x) . \text{ D'où le résultat.} \end{aligned}$$



2. Centre de symétrie

Proposition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit a et b deux réels.

Si $(\forall x \in D_f) \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$, alors le point $\Omega(a; b)$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)

Remarque

Le réel a peut ne pas appartenir à D_f

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Montrer que

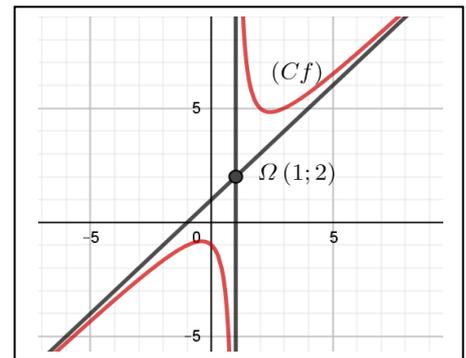
le point $\Omega(1; 2)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f) .

En effet : $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Soit $x \in D_f$

donc $x \neq 1$ et $2a - x = 2 - x \neq 1$ et

$$f(2a - x) = f(2 - x) = \frac{(2 - x)^2 + 1}{(2 - x) - 1} = \frac{x^2 - 4x + 5}{1 - x} \text{ et comme } 2b - f(x) = 4 - \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 5}{1 - x}$$

d'où $f(2 - x) = 4 - f(x)$ cqfd.

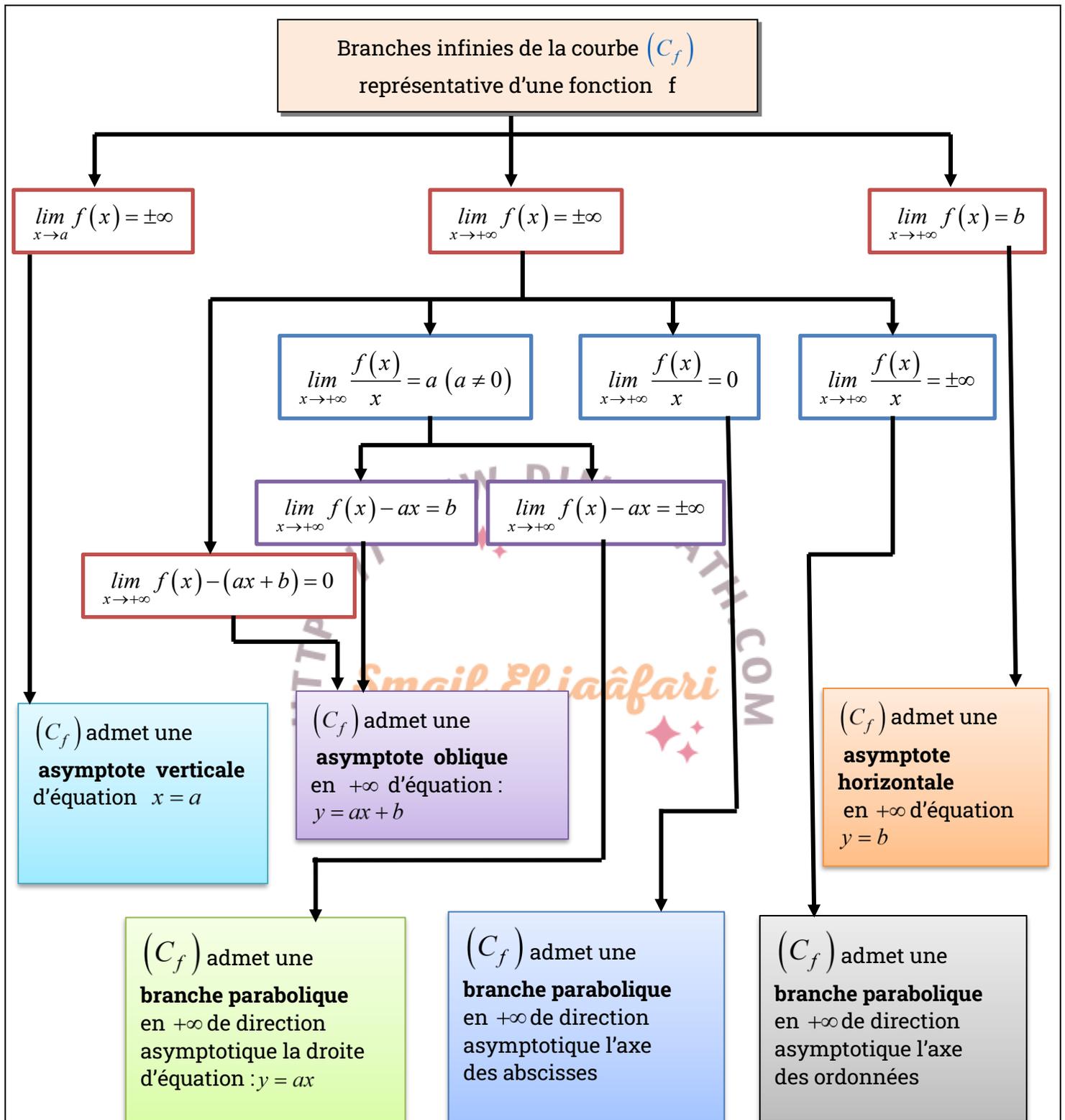


III - Branches infinies

Définition :

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

On dit que (C_f) admet une branche infinie si l'une au moins des bornes de D_f ou $f(D_f)$ est infinie.



IV - Position relative d'une courbe par rapport à une autre courbe

Proposition 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et (C_f) et (C_g) leur courbe respective dans un repère .

- ▶ (C_f) est dessus de $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$
- ▶ (C_f) est en dessous de $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$



► (C_f) et (C_g) se coupent au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow f(a) = g(a)$

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère

Et soit (Δ) la droite d'équation $y = mx + p$ où p et m sont des réels quelconques

- * La courbe (C_f) passe au-dessus de la droite $(\Delta) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \geq 0$
- * La courbe (C_f) passe en dessous de la droite $(\Delta) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \leq 0$
- * La courbe (C_f) et la droite (Δ) se coupent au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow a$ est une solution

De l'équation $f(x) = mx + p$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$. Etudier la position relative de la courbe

(C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par rapport à la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (2x + 1) = -\frac{x}{x^2 + 1}$. Puisque

$x^2 + 1 > 0$ alors le signe de $-\frac{x}{x^2 + 1}$ est le même que celui de $(-x)$.

| | | | |
|---|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $-x$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x) - (2x + 1)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| Position de (C_f) par rapport à (D) | (C_f) au-dessus de (D) / $I(0;1)$ / (C_f) en dessous de (D) | | |

V - Parité et variation d'une fonction

Proposition

Soit f une fonction définie sur D_f et $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$ et $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$.

- Si f est paire ou impaire, on peut étudier la fonction f seulement sur $D_E = I$ et on déduira son étude sur J .
- Si f est périodique de période T , on peut étudier la fonction f seulement sur $D_E = D_f \cap [a; a+T]$ où $a \in \mathbb{R}$

Proposition

Soit f une fonction définie sur D_f et $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$ et $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$.

- ↳ Si f est impaire, alors la fonction f a les mêmes variations sur I et sur J
- ↳ Si f est paire, alors les variations de f sur J sont opposées aux variations de f sur I

VI – Concavité de la courbe d'une fonction

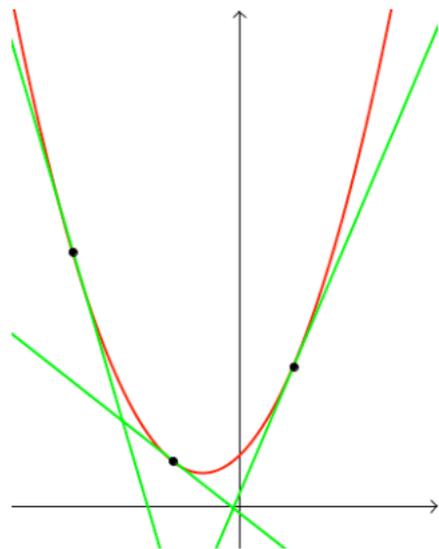
Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit (C_f) sa courbe représentative dans

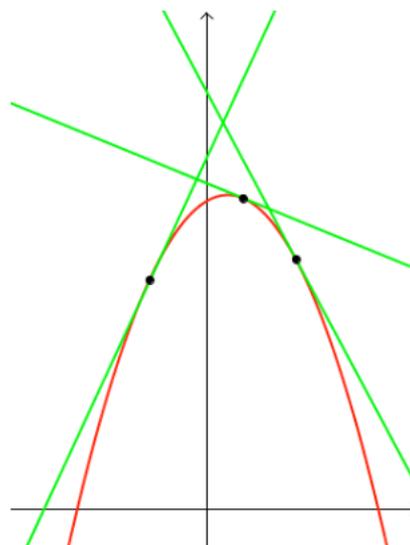


un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ▲ On dit que la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle I si, et seulement si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- ▲ On dit que la courbe (C_f) est concave sur l'intervalle I si, et seulement si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Courbe convexe



Courbe concave

Définition 2

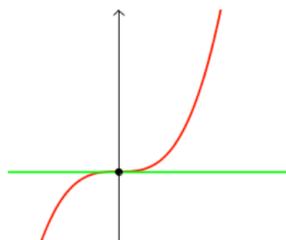
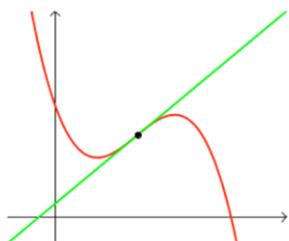
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) si et seulement si elle change sa concavité au point A .

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ★ Si $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$, alors la courbe (C_f) est convexe sur I .
- ★ Si $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$, alors la courbe (C_f) est concave sur I .
- ★ Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in I$, alors le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .



Remarque



La concavité de la courbe (C_f) peut être utile pour étudier la position relative entre la courbe (C_f) et l'une de ses tangentes.

V - Courbe d'une fonction : (méthode)

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f . Pour construire la courbe C_f

représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on peut suivre le protocole suivant :

- Construire un repère selon les consignes
- Tracer les asymptotes lorsqu'elles existent
- Placer les points remarquables (Les points où s'annule la dérivée ; les points d'intersection avec les axes du repère lorsqu'ils sont utiles ; les points d'inflexion ; ...)
- Tracer les tangentes aux points remarquables
- Utiliser le tableau de variations pour avoir une idée sur l'allure de la courbe
- Construire la courbe C_f

