I – Vocabulaires

- Une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle des issues possibles sera réalisée.
- L'univers Ω est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. On va nous restreindre aux cas où l'univers est fini et non vide : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ et $\operatorname{card}\Omega=n$.
- Toute partie de Ω est appelée un événement
- Les singletons $\{\omega_k\}$ sont appelés des événements élémentaires
- Ω est appelé l'événement certain
- $\varnothing$ est appelé l'événement impossible.
- Si A et B sont deux événements de Ω, l'événement $A\cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
- Si A et B sont deux événements de Ω, l'événement $A\cap B$ est réalisé si les deux événements A et B sont réalisés.
- Si A est un événement de Ω, l'événement contraire de A noté $\overline{A}$ est la partie de Ω constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.
- Deux événements de Ω, A et B sont dits incompatibles si $A\cap B=\varnothing$.

II – Probabilité sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire

1 – Probabilité d'un événement

Définition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,\dots,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire tel que $card\,\Omega=n$.

- En répétant cette expérience N fois dans les mêmes conditions. Si n_i est le nombre de fois que l'on obtienne l'issue ω_i. Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ que l'on note $p_i=p(\{w_i\})=p(\omega_i)=\frac{n_i}{N}$
- On a : $\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+\dots+p_n=1$
- Si A est un événement tel que $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\dots,\omega_{k_s}\}$ où $1\le k_1<k_2<\dots<k_s\le n$, alors : la probabilité de A est : $p(A)=p(\omega_{k_1})+p(\omega_{k_2})+\dots+p(\omega_{k_s})$

Propriétés

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et soit p une probabilité sur Ω.

- ★ $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)) : 0\le p(A)\le 1$ ..
- ★ $p(\Omega)=1$ et $p(\varnothing)=0$.
- ★ $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : A\subset B\Rightarrow p(A)\le p(B)$.
- ★ $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : A\cap B=\varnothing\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- ★ $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega))(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- ★ $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)) : p(\overline{A})=1-p(A)$

2 – Hypothèse d'équiprobabilité

Définition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,\dots,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

On dit qu'on a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité c'est-à-dire

$$p_1=p_2=\dots=p_n=\frac{1}{card\,\Omega}.$$

Proposition

Soit $\Omega=\{w_1,w_2,...,\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. On désigne par p une probabilité sur l'univers Ω qui vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité. Alors : $(\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)):\ p(A)=\dfrac{card\ A}{card\ \Omega}$

Remarques

On a équiprobabilité dans les cas suivants :

- Lorsqu'on un dé non truqué
- Lorsqu'on a une pièce de monnaie non truquée
- Lorsque les boules ou les billes ou les jetons sont indiscernables au toucher
- Lorsqu'on le dit dans l'énoncé
- ...

Exemple

Une urne U contient 12 boules indiscernables au toucher : 3 noires, 4 vertes et 5 blanches.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
1) Déterminer le nombre des tirages possibles.
2) Soit A l'événement : « Obtenir 3 boules de même couleur »
B l'événement : « Obtenir 3 boules de couleurs différentes deux à deux »
Calculer $p(A)$ et $p(B)$

III – Probabilité conditionnelle

1 – Probabilité conditionnelle

Définition

Soit p une probabilité sur un univers Ω. Soient A et B deux événements tels que : $p(A)\neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est notée $p_A(B)$ ou $p(B\setminus A)$ et est définie par : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

Proposition

Soit p une probabilité sur un univers Ω.

- ★ Si A est un événement tel que $p(A)\neq 0$, alors $p_A(A)=1$.
- ★ Si A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, alors :
$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)\quad \text{et}\quad p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$$
- ★ Si A et B deux événements incompatibles $(A\cap B=\varnothing)$ tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, alors :
$$p_A(B)=0\quad \text{et}\quad p_B(A)=0$$

2 – Probabilités totales

Définition

- Soient A et B deux parties non vides de Ω. On dit que A et B forment une partition de parties non vides de Ω si et seulement si : $A\cap B\neq\varnothing$ et $A\cup B=\Omega$
- Plus généralement, Si $A_1,;A_2;...;A_n$ sont des parties non vides d'un ensemble Ω. On dit que $A_1,;A_2;...;A_n$ forment une partition de Ω si et seulement si : $A_i\cap A_j=\varnothing$ si $i\neq j$ et $\bigcup_{i=1}^{i=n}A_i=\Omega$.

Remarque

Soit A un événement de Ω. Alors A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω car : $A\cap\bar{A}=\varnothing$ et $A\cup\bar{A}=\Omega$.

Proposition

- ★ Soit A un événement de Ω tel que $p(A)\neq 0$. Alors :
$$(\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)):\ p(B)=p(A\cap B)+p(\bar{A}\cap B)=p(A)\times p_A(B)+p(\bar{A})\times p_{\bar{A}}(B)$$

★ Soient $A_1, ; A_2 ; ... ; A_n$ des événements de Ω qui forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)) : p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \times p_{A_i}(B)$$

Remarque

Si A, B et C forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall E \in \mathcal{P}(\Omega)) : p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) + p(C \cap E) = p(A) \times p_A(E) + p(B) \times p_B(E) + p(C) \times p_C(E)$$

Formule de Bayes

Soient $A_1, ; A_2 ; ... ; A_n$ des événements de Ω qui forment une partition de Ω. Alors :

$$(\forall i \in \{1,2,3,...,n\})(\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)) : p_B(A_i) = \frac{p(A_i) \times p_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} p(A_k) \times p_{A_k}(B)}$$

IV – Indépendance

1 – Indépendance des événements

Définition

Soient A et B deux événements de Ω.

On dit que A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Proposition

Soient A et B deux événements de Ω.

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

2 – Indépendance des épreuves

Définition

Lorsqu'une expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, on dit qu'on une répétition d'expériences identiques. Ces expériences aléatoires successives sont indépendantes lorsque chaque issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

V – Variables aléatoires

1 – Définition et notations

Définition 1

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Toute application définie de Ω vers $\mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire. Elle est notée habituellement par les lettres **X** , **Y** , **Z** ...

Notations et vocabulaire

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω.

★ On note par $\mathbf{X}(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par **X** c'est-à-dire l'ensemble des images par **X** des éléments de Ω. On pose $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(X = x) = \{w \in \Omega / X(w) = x\}$

★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(X \leq x) = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\}$

Exemple

On considère l'expérience suivante : On jette une pièce de monnaie non truquée 3 fois en l'air, en numérotant après chaque lancer la face apparente de la pièce. Après chaque lancer si on obtient la face P on gagne 5 dh et si on obtient la face F on perd 2 dh. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le gain algébrique.

1) Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

2 – loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

La loi de probabilité de **X** est l'application définie de **X**(Ω) vers $\mathbb{R}$ par : $x_i \mapsto p(X = x_i)$

Règle

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω.
Pour déterminer la loi de probabilité de **X**, on devrait :

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par **X** : **X**$(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
- Calculer les probabilités $p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

La loi de probabilité de **X** est habituellement représentée dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

3 – Espérance mathématique – Variance – Ecart-type

Définition

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que **X**$(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

- L'espérance mathématique de **X** est : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$
- La variance de **X** est : $V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$
- L'écart-type de **X** est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Proposition

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω telle que **X**$(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

Alors : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i\right)^2$

Remarques

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs qu'elle prend.
- Lorsqu'une variable aléatoire est définie comme un gain algébrique lors d'un jeu, l'espérance représente le gain moyen après un très grand nombre de parties.
  Ainsi une espérance nulle indique un jeu équitable, une espérance négative indique un jeu défavorable au joueur et une espérance positive indique un jeu favorable au joueur.

Exemple

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

A : « tirer trois boules de même couleur »

B : « tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux »

Montrer que : $p(A)=\dfrac{3}{44}$ *et* $p(B)=\dfrac{3}{11}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent les boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$

Théorème

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω . Alors :

- ★ $(\forall\alpha\in\mathbb{R}) : \mathrm{E}(\alpha\mathrm{X})=\alpha\,\mathrm{E}(\mathrm{X})$
- ★ $\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})$
- ★ $\mathrm{V}(\alpha\mathrm{X})=\alpha^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

VI – Fonction de répartition

Définition

Soit **X** une variable aléatoire définie sur Ω ..

La fonction $\mathrm{F_X}$ définie pour tout réel x par : $\mathrm{F_X}(x)=p(\mathrm{X}\le x)$, est appelée la fonction de répartition de X.

Exemple

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

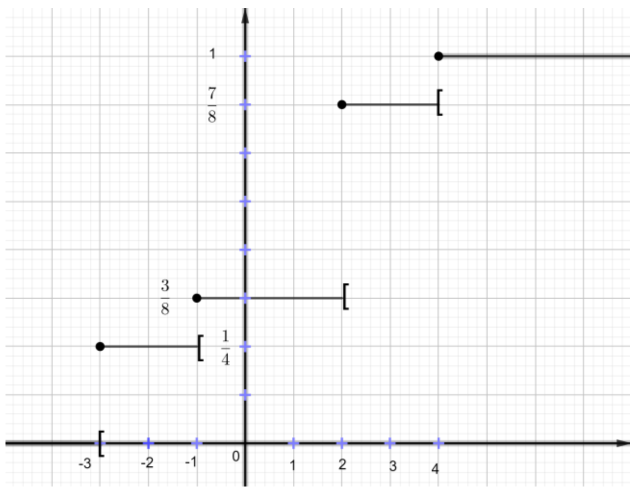
x_i	-3	-1	2	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par segment :

- Si $x<-3$, on a : $\mathrm{F_X}(x)=0$
- Si $-3\le x<-1$, on a : $\mathrm{F_X}(x)=\dfrac{1}{4}$
- Si $-1\le x<2$, on a : $\mathrm{F_X}(x)=\dfrac{3}{8}$
- Si $2\le x<4$, on a : $\mathrm{F_X}(x)=\dfrac{7}{8}$
- Si $x\ge 4$, on a : $\mathrm{F_X}(x)=1$

Donc $\mathrm{F_X}(x)=\begin{cases}0\ ;\ \text{si } x<-2\\ \dfrac{1}{4}\ ;\ \text{si } -2\le x<-1\\ \dfrac{3}{8}\ ;\ \text{si } -1\le x<2\\ \dfrac{7}{8}\ ;\ \text{si } 2\le x<4\\ 1\ ;\ \text{si } x\ge 4\end{cases}$

Représentation graphique de $\mathrm{F_X}$:



VII – Loi binomiale

Définition

Soit A un événement dans un expérience aléatoire tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$. On pose $p(\mathrm{A}) = p$. On répète cette expérience n fois indépendamment.
Soit **X** la variable aléatoire qui associe à chaque possibilité le nombre de fois que l'événement A est réalisé.
On dit que la variable aléatoire **X** suit une loi binomiale de paramètres n et p

Proposition

Soit **X** une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

- ★ $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
- ★ L'espérance mathématique de **X** est : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n \times p$
- ★ La variance de **X** est : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = n \times p \times (1-p)$
- ★ L'écart-type de **X** est : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)}$