I - Parité et périodicité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f et $T \in \mathbb{R}^{+*}$

- Dire que f est paire signifie que : $(\forall x \in D_f);\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- Dire que f est impaire signifie que : $(\forall x \in D_f);\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
- Dire que f est périodique de période T (ou T-périodique) signifie que :

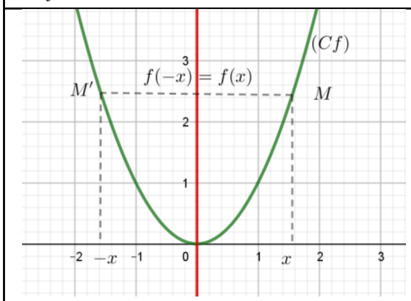
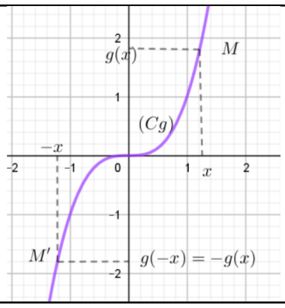
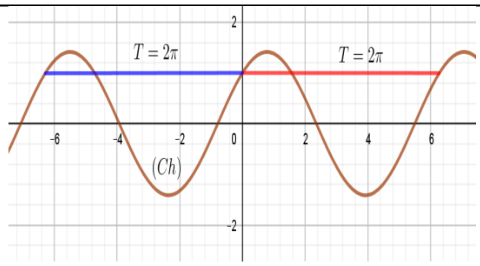
  $(\forall x \in D_f)\begin{cases} x+T \in D_f \ \ et \ \ x-T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Proposition

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Si f est paire, alors sa courbe (C_f) admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie
- Si f est impaire, alors sa courbe (C_f) admet l'origine du repère pour centre de symétrie
- Si f est T-périodique $(T \in \mathbb{R}^{+*})$, alors sa courbe (C_f) est invariante par translation de vecteur $T.\vec{i}$

Exemples :

$f(x) = x^2$. $D_f = \mathbb{R};\ f\ est\ paire$	$g(x) = x^3$. $D_g = \mathbb{R};\ g\ est\ impaire$	$h(x) = cos\,x + sin\,x$. $D_h = \mathbb{R};$ $h\ est\ périodique\ de\ période\ T = 2\pi$
		
(C_f) admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie	(C_g) admet O l'origine du repère pour centre de symétrie	(C_h) est invariable par la translation de vecteur $T.\vec{i}$

II - Eléments de symétrie

1. Axe de symétrie

Propositions

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Si $(\forall x \in D_f);\begin{cases} 2a-x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)

Remarques :

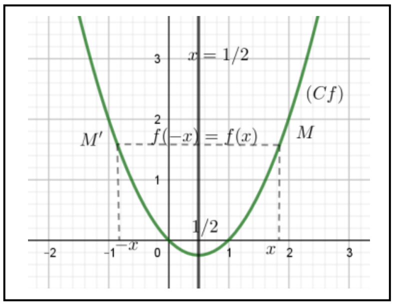
1/ Le réel a peut ne pas appartenir à D_f.

2/ Pour montrer que la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) on peut aussi montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}) : a+x\in D_f$ on a $\begin{cases} a-x\in D_f \\ f(a+x)=f(a-x)\end{cases}$

Exemples :

$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$ .Montrer que la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

En effet on a : $D_f=\mathbb{R}$. Soit $x\in D_f$ alors $2a-x=1-x\in D_f=\mathbb{R}$



et $f(2a-x)=f(1-x)=\dfrac{(1-x)^2-(1-x)-2}{(1-x)^2-(1-x)+1}$

$=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}=f(x)$. D'où le résultat.

2. Centre de symétrie

Proposition

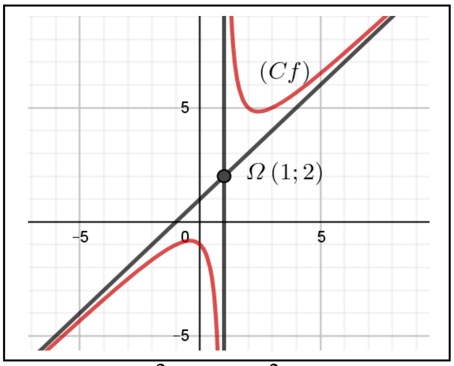
Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et soit a et b deux réels.

Si $(\forall x\in D_f)\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$, alors le point $\Omega(a;b)$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)

Remarque

Le réel a peut ne pas appartenir à D_f

Exemple



Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f).

En effet : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ .Soit $x\in D_f$

donc $x\neq 1$ et $2a-x=2-x\neq 1$ et

$f(2a-x)=f(2-x)=\dfrac{(2-x)^2+1}{(2-x)-1}=\dfrac{x^2-4x+5}{1-x}$ et comme $2b-f(x)=4-\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{x^2-4x+5}{1-x}$

d'où $f(2-x)=4-f(x)$ cqfd.

III - Branches infinies

Définition :

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

On dit que (C_f) admet une branche infinie si l'une au moins des bornes de D_f ou $f(D_f)$ est infinie.

Branches infinies de la courbe (C_f) représentative d'une fonction f

- $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ → (C_f) admet une **asymptote verticale** d'équation $x=a$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ → (C_f) admet une **asymptote horizontale** en $+\infty$ d'équation $y=b$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$:
  - $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ → (C_f) admet une **asymptote oblique** en $+\infty$ d'équation : $y=ax+b$
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$:
    - $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ → (C_f) admet une **asymptote oblique** en $+\infty$ d'équation : $y=ax+b$
    - $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ → (C_f) admet une **branche parabolique** en $+\infty$ de direction asymptotique la droite d'équation : $y=ax$
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ → (C_f) admet une **branche parabolique** en $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des abscisses
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ → (C_f) admet une **branche parabolique** en $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des ordonnées

IV - Position relative d'une courbe par rapport à une autre courbe

Proposition 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et (C_f) *et* (C_g) leur courbe respective dans un repère .

- (C_f) est dessus de $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x\in I);\ f(x)\geq g(x)$
- (C_f) est en dessous de $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x\in I);\ f(x)\leq g(x)$

- (C_f) *et* (C_g) se coupent au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow f(a) = g(a)$

Proposition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère

Et soit (Δ) la droite d'équation $y = mx + p$ où p et m sont des réels quelconques

* La courbe (C_f) passe au-dessus de la droite (Δ) $\Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \geq 0$
* La courbe (C_f) passe en dessous de la droite $(\Delta) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \leq 0$
* La courbe (C_f) et la droite (Δ) se coupent au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow$ *a est une solution*
  De l'équation $f(x) = mx + p$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$. Etudier la position relative de la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par rapport à la droite (D) d'équation : $y = 2x + 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (2x + 1) = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$ .Puisque

$x^2 + 1 > 0$ alors le signe de $-\dfrac{x}{x^2 + 1}$ est le même que celui de $(-x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	−	
$f(x) - (2x + 1)$		+	0	−	
Position de (C_f) par rapport à (D)		(C_f) au-dessus de (D)	$I(0;1)$	(C_f) en dessous de (D)	

V - Parité et variation d'une fonction

Proposition

Soit f une fonction définie sur D_f et $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$ *et* $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$.

- Si f est paire ou impaire, on peut étudier la fonction f seulement sur $D_E = I$ et on déduira son étude sur J.
- Si f est périodique de période T , on peut étudier la fonction f seulement sur $D_E = D_f \cap [a; a + T]$ où $a \in \mathbb{R}$

Proposition

Soit f une fonction définie sur D_f et $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$ *et* $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$.

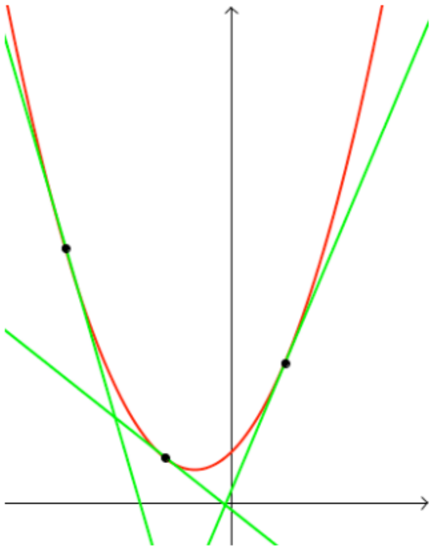
- Si f est impaire , alors la fonction f a les mêmes variations sur I et sur J
- Si f est paire , alors les variations de f sur J sont opposées aux variations de f sur I

VI – Concavité de la courbe d'une fonction

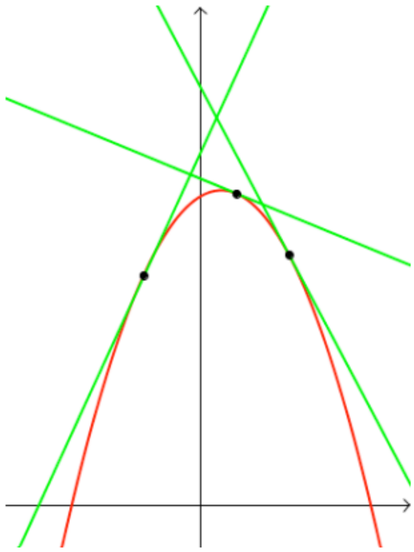
Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **I** et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- On dit que la courbe $\left(C_f\right)$ est convexe sur l'intervalle **I** si, et seulement si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe $\left(C_f\right)$ est concave sur l'intervalle **I** si, et seulement si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Courbe convexe



Courbe concave

Définition 2

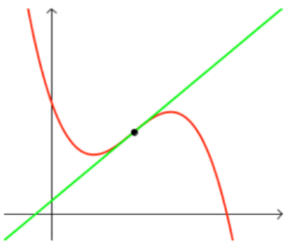
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert **I** et soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

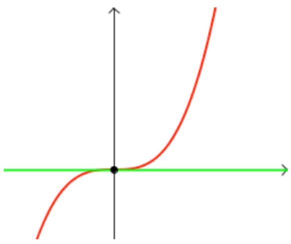
On dit que le point $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\left(C_f\right)$ si et seulement si elle change sa concavité au point A.

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **I** et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- ★ Si $\left(\forall x \in \mathrm{I}\right): f''(x) \geq 0$, alors la courbe $\left(C_f\right)$ est convexe sur **I** .
- ★ Si $\left(\forall x \in \mathrm{I}\right): f''(x) \leq 0$, alors la courbe $\left(C_f\right)$ est concave sur **I** .
- ★ Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in \mathrm{I}$, alors le point $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $\left(C_f\right)$.





Remarque

La concavité de la courbe $\left(C_f\right)$ peut être utile pour étudier la position relative entre la courbe $\left(C_f\right)$ et l'une de ses tangentes.

V - Courbe d'une fonction :(méthode)

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f . Pour construire la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on peut suivre le protocole suivant :

- Construire un repère selon les consignes
- Tracer les asymptotes lorsqu'elles existent
- Placer les points remarquables (Les points où s'annule la dérivée ; les points d'intersection avec les axes du repère lorsqu'ils sont utiles ; les points d'inflexion ; …)
- Tracer les tangentes aux points remarquables
- Utiliser le tableau de variations pour avoir une idée sur l'allure de la courbe
- Construire la courbe C_f