Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de la fonction f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi une suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. Comparer $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(u_{n+1}) < 0$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n+1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2

Soit m un nombre complexe non nul tel que : $m \neq \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - [1 + m(2+i)]z + 2m(1+im) = 0$

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = [1 + m(-2+i)]^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On suppose que $m \neq i$ et on pose $u = \dfrac{2m}{1+im}$.

a) Montrer que : $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |m|^2 = \mathrm{Im}(m)$

b) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que $u \in \mathbb{R}$.

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives $m, -i$ et u.

a) Montrer que les points A, M et O sont alignés si et seulement si m est un imaginaire pur.

b) Montrer que : $\dfrac{u+i}{u} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{m+i}{m}$

c) En déduire que si $m \notin i\mathbb{R}$, alors les points A, M, O et B sont cocycliques.

Exercice 3

Partie I :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 e^x \; ; \; x \leq 0 \\ f(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \; ; \; x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

2) Etudier la dérivabilité à gauche en $x_0 = 0$ de la fonction f.

3) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$.

4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

5) a) Déterminer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) On pose $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1$.

Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis en déduire le signe de $g(x)$ et Celui de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

6) Construire la courbe (C_f) en précisant les deux demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Partie II :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Soit φ_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi_n(x) = \ln[1+(n+1)x] - \frac{n+1}{n+2}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Montrer que φ_n admet un minimum dont on déterminera sa valeur en fonction de n.

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}) : \left[\frac{1+(n+1)x}{n+2}\right]^{n+2} > x^{n+1}$ (I)

2) A l'aide de l'inégalité (I) déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(On pourra poser $x = \frac{n}{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$)

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$ et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n \ge e$.

b) Déduire des résultats des questions précédentes , l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z, $(E) : z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{i\theta}\sin\theta = 0$ où $\theta \in]0,\pi[$.

1) Déterminer les deux solutions de l'équation (E).

2) On pose $z_1 = \frac{e^{i\theta}+1}{2}$ *et* $z_2 = \frac{e^{i\theta}-1}{2}$.

a) Déterminer $z_1 \times z_2$ sous la forme trigonométrique.

b) Montrer que $z_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe z_2.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M ; I ; J ; M_1 et M_2 d'affixes respectives $e^{i\theta}$; 1 ; -1 ; z_1 et z_2.

a) Montrer que le triangle MIJ est rectangle au point M.

b) Montrer que $(IJ)/\!/(M_1M_2)$

4) Soit h l'homothétie de centre M et de rapport 2 et soit r la rotation de centre M et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Montrer que $h(M_1)=I$ et $h(M_2)=J$

b) Montrer que les points M, J et $r(I)$ sont alignés et en déduire que $\dfrac{1+e^{i\theta}}{i(1-e^{i\theta})}\in\mathbb{R}$.

5) Déterminer les valeurs de θ pour lesquels le périmètre du triangle MIJ soit maximal.