Dans cette série le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

## Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M(z) dans chacun des cas suivants :

$E_1=\left\{M(z)/\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$ ; $E_2=\left\{M(z)/\arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ ; $E_3=\left\{M(z)/\arg(z-3i)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

$E_4=\left\{M(z)/\arg(\overline{z})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\right\}$ ; $E_5=\left\{M(z)/\arg(\overline{z}-2+3i)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$ ; $E_6=\left\{M(z)/\arg(z)\equiv\frac{5\pi}{6}[\pi]\right\}$

$E_7=\left\{M(z)/\arg\left(\frac{z-1+2i}{z+1+3i}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$ ; $E_8=\left\{M(z)/\arg\left(\frac{2i}{z+1-2i}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\right\}$ ; $E_9=\left\{M(z)/\arg\left(\frac{2-i-z}{3+2i-z}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[\pi]\right\}$

## Exercice 2

A tout point M d'affixe z tel que $z\neq 3i$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z-2}{iz-3}$.

1) On pose $z=x+iy$ et $z'=X+iY$ où $x,y,X$ et $Y$ sont des réels.

Déterminer $X$ et $Y$ en fonction de $x$ et $y$

2) Déterminer l'ensemble $E_1$ des points M(z) tel que z' soit réel.

3) Déterminer l'ensemble $E_2$ des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur.

## Exercice 3

Déterminer dans chacun des cas suivants, les ensembles des points M(z) :

$F_1=\left\{M(z)/|z-3+2i|=|z+2-3i|\right\}$ ; $F_2=\left\{M(z)/|\overline{z}-5+i|=|z-6-4i|\right\}$ ; $F_3=\left\{M(z)/|iz+2-i|=|\overline{z}-3i|\right\}$

$F_4=\left\{M(z)/|z-3+2i|=3\right\}$ ; $F_5=\left\{M(z)/|\overline{z}-5+i|=6\right\}$ ; $F_3=\left\{M(z)/|iz+2-i|=4\right\}$

$F_7=\left\{M(z)/|z+2i|=4|z-1+i|\right\}$ ; $F_8=\left\{M(z)/|\overline{z}-5+i|=9|z+2+i|\right\}$ ;

## Exercice 4

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=-2i,\ b=4-2i,\ c=4+2i$ et $d=1$.

1) a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Soit F la transformation qui associe à chaque point M(z) tel que $M\neq A$ du plan complexe, le point M'(z') tel que :

$z'=\dfrac{z-(4+2i)}{z+2i}$.

a) Déterminer les images de B et C par la transformation F.

b) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $|z'|=1$. Et construire l'ensemble E.

c) Déterminer et construire l'ensemble E' des points M(z) tels que $z'\in\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que : $(z'-1)(z+2i)=-4-4i$ et

b) Montrer que : $M'\neq D$ , $DM'\times AM=4\sqrt{2}$ et $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{DM'})}+\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AM})}\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

c) Déduire que si le point M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors le point M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## Exercice 5

On considère les points $A(i)$ et $B(1)$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq i$, on pose : $z'=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z'=\overline{z}$ et donner ses solutions sous forme trigonométrique.

2) Déterminer les deux ensembles suivants :

- $E=\{M(z)/z'\in\mathbb{R}\}$
- $F=\{M(z)/z'\in i\mathbb{R}\}$

3) Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.

a) Montrer que : $AM+BM'=2$

b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM'}\right)$.

4) Soit $z_1$ la solution de l'équation : $z'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et soit $M_1$ l'image de $z_1$ dans le plan complexe.

Montrer que le triangle $ACM_1$ est équilatéral (C est le point d'affixe $-i$ ).

5) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z\neq i$, on a : $|z-1|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z'+i|=|z'-1|$

b) Déterminer l'ensemble $G=\{M(z)/|z'+i|=|z'-1|\}$

6) a) Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}),\ z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|z'|=1$

b) Déterminer l'ensemble $H=\{M(z)/|z'|=1\}$

7) On pose $z-i=re^{i\theta}$ où $r\in\mathbb{R}^{+*}$.

a) Déterminer l'écriture trigonométrique du nombre complexe $z'-1$.

b) Déterminer l'ensemble $K=\left\{M'(z')/\arg(z-i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

## Exercice 6

Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul. On considère l'application

$$f_\alpha:\mathbb{C}-\{\alpha\}\to\mathbb{C}-\{\alpha\}$$
$$z\mapsto f_\alpha(z)=\frac{\alpha z}{z-\alpha}$$

1) Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{\alpha\}):\ f_\alpha(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|^2\,\mathrm{Re}(\alpha)=|\alpha|^2\,\mathrm{Re}(z)$

2) On pose pour tout $z\in\mathbb{C}-\{\alpha\}$, $r=|z-\alpha|$ *et* $\arg(z-\alpha)\equiv\theta[2\pi]$ où $r\in\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\theta\in\mathbb{R}$.

a) Calculer $|f_\alpha(z)-\alpha|$ en fonction de $r$ *et* $|\alpha|$

b) Calculer $\arg(f_\alpha(z)-\alpha)$ en fonction de $\theta$ *et* $\arg\alpha$

3) On pose : $\alpha=-1+i$ et on considère les ensembles suivants :

- $(D)=\left\{M(z)/\arg(f_\alpha(z)-\alpha)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$
- $(C)=\{M(z)/|f_\alpha(z)-\alpha|=2\}$
- $(E)=\{M(z)/f_\alpha(z)\in i\mathbb{R}\}$

a) Déterminer les ensembles $(E)$ *et* $(C)$ et montrer que $(D)$ est une demi-droite d'origine le point A $(\alpha)$ privé de A dont on déterminera une équation cartésienne.

b) Soit $z_0\in\mathbb{C}-\{\alpha\}$ et B le point d'affixe $z_0$ tel que $B\in(D)\cap(C)$.

Donner l'écriture algébrique de $f_\alpha(z_0)$ puis déterminer $z_0$.

c) Construire dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les ensembles $(D)$, $(E)$ *et* $(C)$.

4) On considère l'application $\varphi$ qui associe à chaque point M(z) le point M'(z') tel que $z'=(-1+i)z-1+3i$

a) Montrer que $\varphi$ est la composée dune homothétie et d'une rotation que l'on déterminera.

b) Déterminer les images de $(C)$ *et* $(D)$ par l'application $\varphi$.