Exercice 1

Soit F la fonction numérique dont la variable est x, définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

1) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

2) Etudier les variations de la fonction F puis étudier le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x de $]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right):\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\le F(x)\le 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$.

b) En supposant que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=L$, Donner un encadrement de L.

Exercice 2 (AREF MOHAMMEDIA session de juin 2000)

I – 1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}$ et en déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$

2) Pour tout nombre réel x, on pose : $I(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$

a) Sans calculer $I(x)$, montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right);\ 0\le I(x)\le e^x\times\frac{x^3}{6}$ et que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^-\right);\ |I(x)|\le\frac{|x|^3}{6}$

b) En utilisant deux fois une intégration par parties, montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\ I(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=e^x\times\ln(1+x)-x$

Etudier les variations de la fonction f et en déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right),\ f(x)\ge 0$

(On admet que $e^x\ge 1+x$)

II – On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F(x)=\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt \\ F(0)=0 \end{cases}$$

1) Montrer que : $\left(\forall x>0\right),\ \frac{e^x-1-x}{x}\le F(x)\le\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2) Montrer que la fonction F est continue et dérivable à droite en 0.

3) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que : $\left(\forall x>0\right),\ F'(x)=\frac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction F.

5) Etudier la branche infinie de la courbe représentative de la fonction F au voisinage de $+\infty$

Exercice 3

Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}\ ;\ T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}\ ;\ U_n=n\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k^2}\ ;\ V_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\ ;\ W_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}\ ;\ R_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$$

Exercice 4

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{dt}{\sin t}$

1) Montrer que F est bien définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, et qu'elle est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis étudier les variations de la fonction F sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[\right)\left(\forall t\in[x,2x]\right),\ 0<t-\frac{t^2}{2}<\sin t<t$.

b) En déduire que : $\frac{1}{t}<\frac{1}{\sin t}<\frac{1}{t}+\frac{1}{2-t}$

4) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\ln 2<F(x)<\ln 2-\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$.

5) En déduire $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$.

Exercice 5 (AREF MOHAMMEDIA Session de juin 2003)

On considère la fonction numérique f définie sur $D=\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\frac{xe^{-x}}{x-2}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I – 1) a) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de D.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2) a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Montrer que : $f''(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-2)^3}e^{-x}$

c) Montrer que l'équation $x^3-4x^2+8x-4=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui appartient à $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

3) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II – On considère la fonction F définie sur $E=\left]-\infty,0\right[\cup\left]\frac{1}{2},2\right[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)\,dt$

1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur E, et que : $(\forall x\in E),\ F'(x)=\frac{x^3(1-2x)e^{-x}+(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2(x-2)(1-2x)}$

b) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$ on a $F'(x)>0$ et que pour tout $x\in\left]\frac{1}{2},2\right[$ on a $F'(x)<0$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t)=\dfrac{te^{-t}-2e^{-2}}{t-2} \ ;\ t\neq 2\\ g(2)=-e^{-2}\end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $x\in\left]\frac{1}{2},2\right[$ on a : $\int_{\frac{1}{x}}^{x}g(t)\,dt=F(x)-2e^{-2}\ln\left(\frac{x(x-2)}{1-2x}\right)$

b) Montrer que la fonction g admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ (On ne demande pas de la déterminer)

c) Déduire que : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \int_{\frac{1}{x}}^{x} g(t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)\,dt$

d) Déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} F(x)$ (On ne demande pas de calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(t)\,dt$)

3) On suppose que $x>1$

a) Montrer que : $F(-x) = -\int_{1}^{x} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du + \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du = \int_{1}^{0} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du$ (Remarquer que la fonction $u \mapsto \frac{ue^{u}}{u+2}$ admet une primitive sur l'intervalle $[0,1]$.

c) Montrer que : $\int_{1}^{x} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du > \frac{e^{x}-e}{x+2}$ et déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{u\,e^{u}}{u+2}\,du = +\infty$

d) Déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

4) Vérifier que pour tout $x \in E$, on a : $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$ et en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} F(x)$.