



## I - Parité et périodicité d'une fonction

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur son domaine de définition  $D_f$  et  $T \in \mathbb{R}^{+*}$

- ▶ Dire que  $f$  est paire signifie que :  $(\forall x \in D_f); \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- ▶ Dire que  $f$  est impaire signifie que :  $(\forall x \in D_f); \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
- ▶ Dire que  $f$  est périodique de période  $T$  (ou  $T$ -périodique) signifie que :  $(\forall x \in D_f) \begin{cases} x+T \in D_f \text{ et } x-T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

### Proposition

Soit  $f$  une fonction et  $D_f$  son domaine de définition et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Si  $f$  est paire, alors sa courbe  $(C_f)$  admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie
- Si  $f$  est impaire, alors sa courbe  $(C_f)$  admet l'origine du repère pour centre de symétrie
- Si  $f$  est  $T$ -périodique ( $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ), alors sa courbe  $(C_f)$  est invariante par translation de vecteur  $T \cdot \vec{i}$

### Exemples :

$f(x) = x^2$ . $D_f = \mathbb{R}; f$ est paire	$g(x) = x^3$ . $D_g = \mathbb{R}; g$ est impaire	$h(x) = \cos x + \sin x$ . $D_h = \mathbb{R};$ $h$ est périodique de période $T = 2\pi$
$(C_f)$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie	$(C_g)$ admet O l'origine du repère pour centre de symétrie	$(C_h)$ est invariable par la translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$

## II - Eléments de symétrie

### 1. Axe de symétrie

#### Propositions

Soit  $f$  une fonction et  $D_f$  son domaine de définition et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et soit  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $(\forall x \in D_f); \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$  alors la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$

#### Remarques :



1/ Le réel  $a$  peut ne pas appartenir à  $D_f$ .

2/ Pour montrer que la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$  on peut

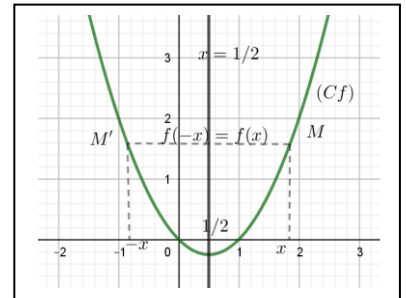
aussi montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : a + x \in D_f$  on a  $\begin{cases} a - x \in D_f \\ f(a + x) = f(a - x) \end{cases}$

**Exemples :**

$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$ . Montrer que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .

En effet on a :  $D_f = \mathbb{R}$ . Soit  $x \in D_f$  alors  $2a - x = 1 - x \in D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{et } f(2a - x) &= f(1 - x) = \frac{(1 - x)^2 - (1 - x) - 2}{(1 - x)^2 - (1 - x) + 1} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} = f(x). \text{ D'où le résultat.} \end{aligned}$$



## 2. Centre de symétrie

### Proposition

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et soit  $a$  et  $b$  deux réels.

Si  $(\forall x \in D_f) \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$ , alors le point  $\Omega(a; b)$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$

### Remarque

Le réel  $a$  peut ne pas appartenir à  $D_f$

### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ . Montrer que

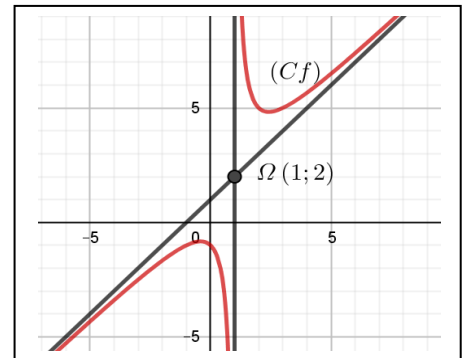
le point  $\Omega(1; 2)$  est le centre de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .

En effet :  $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$ . Soit  $x \in D_f$

donc  $x \neq 1$  et  $2a - x = 2 - x \neq 1$  et

$$f(2a - x) = f(2 - x) = \frac{(2 - x)^2 + 1}{(2 - x) - 1} = \frac{x^2 - 4x + 5}{1 - x} \text{ et comme } 2b - f(x) = 4 - \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 5}{1 - x}$$

d'où  $f(2 - x) = 4 - f(x)$  cqfd.

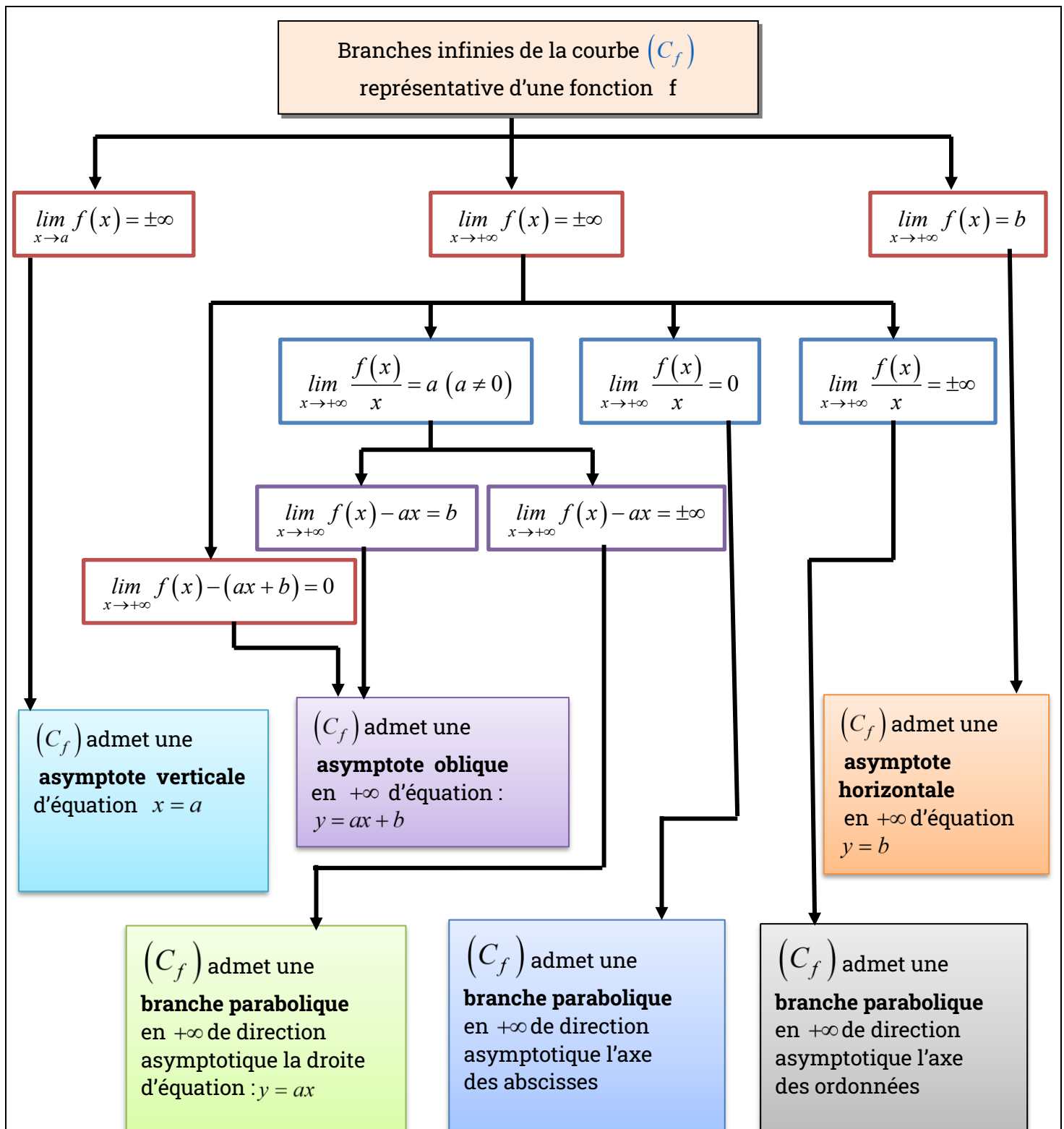


## III - Branches infinies

### Définition :

Soit  $f$  une fonction de domaine de définition  $D_f$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère.

On dit que  $(C_f)$  admet une branche infinie si l'une au moins des bornes de  $D_f$  ou  $f(D_f)$  est infinie.



#### IV - Position relative d'une courbe par rapport à une autre courbe

##### Proposition 1

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $(C_f)$  et  $(C_g)$  leur courbe respective dans un repère .

- ▶  $(C_f)$  est dessus de  $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$
- ▶  $(C_f)$  est en dessous de  $(C_g) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$
- ▶  $(C_f)$  et  $(C_g)$  se coupent au point  $A(a; f(a)) \Leftrightarrow f(a) = g(a)$

**Proposition 2**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère

Et soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = mx + p$  où  $p$  et  $m$  sont des réels quelconques

\* La courbe  $(C_f)$  passe au-dessus de la droite  $(\Delta) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \geq 0$

\* La courbe  $(C_f)$  passe en dessous de la droite  $(\Delta) \Leftrightarrow (\forall x \in I); f(x) - (mx + p) \leq 0$

\* La courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  se coupent au point  $A(a; f(a)) \Leftrightarrow a$  est une solution

De l'équation  $f(x) = mx + p$

**Exemple :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ . Etudier la position relative de la courbe

$(C_f)$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  par rapport à la droite

$(D)$  d'équation :  $y = 2x + 1$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - (2x + 1) = -\frac{x}{x^2 + 1}$ . Puisque

$x^2 + 1 > 0$  alors le signe de  $-\frac{x}{x^2 + 1}$  est le même que celui de  $(-x)$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$	$+$	$0$	$-$
$f(x) - (2x + 1)$	$+$	$0$	$-$
Position de $(C_f)$ par rapport à $(D)$	$(C_f)$ au-dessus de $(D)$ $(C_f)$ en dessous de $(D)$		

**V - Parité et variation d'une fonction****Proposition**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D_f$  et  $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$  et  $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$ .

- Si  $f$  est paire ou impaire, on peut étudier la fonction  $f$  seulement sur  $D_E = I$  et on déduira son étude sur  $J$ .
- Si  $f$  est périodique de période  $T$ , on peut étudier la fonction  $f$  seulement sur  $D_E = D_f \cap [a; a + T]$  où  $a \in \mathbb{R}$

**Proposition**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D_f$  et  $I = D_f \cap \mathbb{R}^+$  et  $J = D_f \cap \mathbb{R}^-$ .

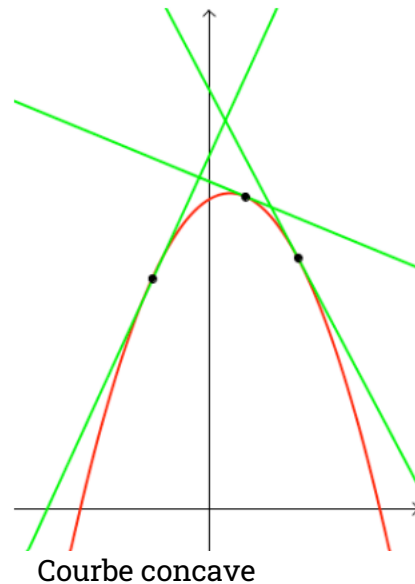
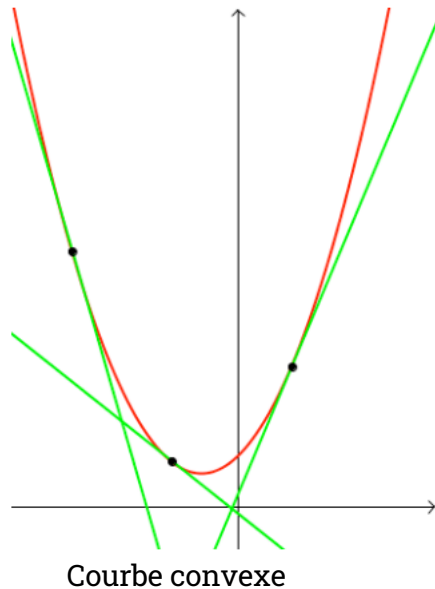
- Si  $f$  est impaire, alors la fonction  $f$  a les mêmes variations sur  $I$  et sur  $J$
- Si  $f$  est paire, alors les variations de  $f$  sur  $J$  sont opposées aux variations de  $f$  sur  $I$

**VI – Concavité de la courbe d'une fonction****Définition 1**

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



- ▲ On dit que la courbe  $(C_f)$  est convexe sur l'intervalle  $I$  si, et seulement si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- ▲ On dit que la courbe  $(C_f)$  est concave sur l'intervalle  $I$  si, et seulement si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



### Définition 2

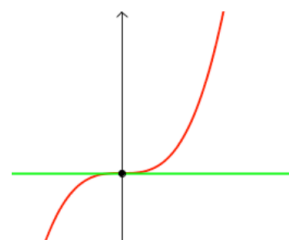
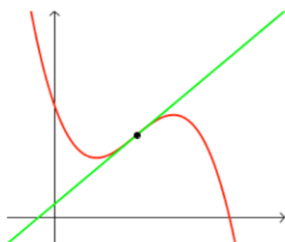
Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $x_0 \in I$  et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On dit que le point  $A(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C_f)$  si et seulement si elle change sa concavité au point  $A$ .

### Proposition

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- ★ Si  $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$ , alors la courbe  $(C_f)$  est convexe sur  $I$ .
- ★ Si  $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$ , alors la courbe  $(C_f)$  est concave sur  $I$ .
- ★ Si la fonction dérivée seconde  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $x_0 \in I$ , alors le point  $A(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C_f)$ .



### Remarque

La concavité de la courbe  $(C_f)$  peut être utile pour étudier la position relative entre la courbe  $(C_f)$  et l'une de ses tangentes.

**V - Courbe d'une fonction : (méthode)**



Soit  $f$  une fonction définie sur son domaine de définition  $D_f$ . Pour construire la courbe  $C_f$  représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on peut suivre le protocole suivant :

- Construire un repère selon les consignes
- Tracer les asymptotes lorsqu'elles existent
- Placer les points remarquables (Les points où s'annule la dérivée ; les points d'intersection avec les axes du repère lorsqu'ils sont utiles ; les points d'inflexion ; ...)
- Tracer les tangentes aux points remarquables
- Utiliser le tableau de variations pour avoir une idée sur l'allure de la courbe
- Construire la courbe  $C_f$

