Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n + 1 - 2e^{-x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$, puis vérifier que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : 0 < \alpha_n < \ln 2$

2) a) Prouver que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^n(\alpha_n - 1)$

b) Déterminer la monotonie de la suite numérique $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ puis déduire qu'elle est convergente

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 2

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x + (x-1)e^x + 1$$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Déterminer les branches infinies de la courbe représentative $\left(C_g\right)$ de la fonction g.

2) a) Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle I, puis calculer $g'(x)$ pour tout x de I.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) a) Démontrer que $\left(\forall x \in]0,1]\right) : g(x) \leq x$ et que $\left(\forall x \in]1,+\infty[\right) : g(x) > x$.

b) Construire la courbe $\left(C_g\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie II :

1) a) Montrer que la fonction g est une bijection de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que sa fonction réciproque g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

2) On considère la suite numérique $\left(u_n\right)$ définie par : $u_0 = 2$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $u_{n+1} = g^{-1}\left(u_n\right)$

a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$; $u_n > 1$

b) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente puis calculer sa limite.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n - 1}\right)$

Partie III :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x + (x-2)e^x - x \text{ ; si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter ce résultat géométriquement.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ pour tout $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Donner en justifiant la réponse, le nombre de solutions dans l'intervalle $]0,+\infty[$ de l'équation :

$$1+x\ln x=(x-2)\left(1-e^{x}\right)$$

Exercice 3

Partie I :

1) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right): x>2\ln x$.

b) Déduire que : $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right): x+\ln x>0$

2) On pose pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x)=x-\ln^{2}x$.

a) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

b) Déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ puis vérifier que $\alpha<1$.

c) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x de $]0,+\infty[$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-\ln x}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et interpréter ce résultat géométriquement.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on dire de la courbe $\left(C_f\right)$?

b) Montrer que : $\left(\exists\beta\in\,]0,1[\right):\ f'(\beta)=0$

c) Montrer que : $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right)$; $f'(x)=\dfrac{x-\ln^{2}x}{(x-\ln x)^{2}}$ et en déduire que $\beta=\alpha$.

3) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha}{1+\sqrt{\alpha}}$

c) Prouver que $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right)$; $f(x)<x$

d) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ (On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$; $\alpha\simeq0{,}5$ *et* $f(\alpha)\simeq-0{,}3$)

Partie III :

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$.

1) a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on Déterminera.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J puis calculer $\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{e}{e-1}\right)$

c) Construire la courbe $\left(C_{h^{-1}}\right)$ dans le même repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists! a_n\in\left]1,+\infty\right[\right): h\left(a_n\right)=\frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ est strictement croissante .

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(a_n\right)$.

3) On pose $\varphi(x)=\sqrt[3]{f(x)}$

a) Déterminer D_φ l'ensemble de définition de la fonction φ.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction φ à droite en 1.

c) Etudier le sens de variation de la fonction φ sur D_φ.