Exercice 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$ où a est un paramètre complexe. Soit z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

1/ Sans résoudre l'équation (E), montrer que : $|z_1| \times |z_2| = 1$ et que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2/ a/ On pose $z_1 = e^{i\theta}$. Montrer que : $a = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

B/ En déduire que si $z_1 = i$ alors $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$.

3/ On pose $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et on considère les points $A(a), M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

a/ Déterminer la nature de OM_1M_2 et de OM_1AM_2

b/ En déduire le module et un argument du nombre complexe a.

Exercice 2

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tels que : $a + b \neq c$.

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E): z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$.

b) On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $c = a - b$.

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

a) Montrer que : $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$.

b) Calculer : $\frac{p-d}{q-d}$

c) En déduire la nature du triangle PQR.

3) Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

a) Montrer que l'affixe du point K est $k = a + \frac{1}{2}(c-b)$.

b) Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques

Exercice 3

Soit m un nombre complexe tel que $m \neq 2$ et $m \neq -i$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E):\ z^2-(m-i)z-im=0$.

1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+i)^2$.

b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E).

c) Sachant que $m=e^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre complexe z_1+z_2 sous forme exponentielle.

2) On considère les points A, B et M d'affixes respectives 2, $-i$ *et* m, et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.

a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M'.

b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $\mathrm{ANM'B}$ soit un parallélogramme.

c) Montrer que les deux droites (AM) et $(\mathrm{BM'})$ sont perpendiculaires si et seulement si $\mathrm{Re}\left((2-i)m\right)=\mathrm{Re}\left(m^2\right)$.

Exercice 4

I – Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$(E):z^2+2z+1+m^2=0 \quad et \quad (F):z^3+2(1-i)z^2+\left(1+m^2-4i\right)z-2i\left(1+m^2\right)=0$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

II – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux points $\mathrm{A}(-+im)$ et $\mathrm{B}(-1-im)$.

Soient Ω le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$, A' le milieu du segment $[\mathrm{OB}]$ et B' le milieu du segment $[\mathrm{OA}]$.

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $\mathrm{P}(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $\mathrm{Q}(q)$ et la rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $\mathrm{R}(r)$.

1) Montrer que : $p=-1+m$, $q=\frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r=\overline{q}$.

2) a) Vérifier que : $q-r=-ip$.

b) En déduire que $\mathrm{OP}=\mathrm{QR}$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.