Exercice 1

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$.

1) Etudier les variations de la fonction f_n.

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n et que $u_n\in]0,1[$.

3) On définit ainsi une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$. Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1})<0$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puis déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(u_n)=-\dfrac{u_n}{2n+1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 2

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\left(e^{-x}+\dfrac{1}{2}x-1\right)$,

Et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=4(e^{-x}-1)(1-x)$

b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$

(On prend $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5$)

d) Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{2}$.

3) a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0)=0$.

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que pour tout réel $x\neq x_0$ de l'intervalle $[0,1]$ on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$.

c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

4) a) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

b) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(On prendra : $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm,\ f(1)\simeq 0,5$ et il n'est pas demandé de placer le point I).

5) a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]-\infty,\alpha\right]\right)$; $f(x)\leq 0$

b) Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$ et en déduire que : $\frac{3}{2}<\alpha\leq\sqrt{3}$.

c) Calculer en fonction de α, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_f\right)$ et les droites d'équations : $y=0,\ x=0\ et\ x=\alpha$

Partie II :

On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0<\alpha$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_{n+1}=f\left(u_n\right)+u_n$

1) a) Montrer par récurrence que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_n<\alpha$. (Utiliser la question 5)a) de la partie I)

b) En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) On suppose que $0\leq u_0$ et on pose $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$; $g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$; $g(x)>0$. (On prendra : $\ln 2\simeq 0,69$)

b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_n\geq 0$.

(On remarquera que : $f(x)+x=4x\,g(x)$)

c) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) On suppose $u_0<0$.

a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_{n+1}-u_n\leq f\left(u_n\right)$.

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$; $u_n\leq u_0+n\,f\left(u_0\right)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3

Partie I :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{x} & ;\ x>0 \\ g(0)=2 \end{cases}$

Et soit $\left(C_g\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Vérifier que la fonction g est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

2) Pour tout nombre réel a de $\left]0,+\infty\right[$, on pose : $\varphi_a(x)=\left(1-2a-e^{-2a}\right)x^2-\left(1-2x-e^{-2x}\right)a^2$.

a) Calculer $\varphi_a(0)$ et $\varphi_a(a)$ et en déduire que : $\left(\exists c\in\left]0,a\right[\right):\dfrac{1-2a-e^{-2a}}{a^2}=\dfrac{e^{-2c}-1}{c}$.

b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 et que : $g'_d(0)=-2$.

3) a) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\ g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}\ \text{où}\ h(x)=-1+(2x+1)e^{-2x}$$

b) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);h(x)>0$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

4) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$ tel que $g(\alpha)=1$.

5) Construire La courbe (C_g) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie II :

1) On pose $\mathrm{I}=\left[\frac{1}{2},\alpha\right]$ et $(\forall x\in\mathbb{R})$, $G(x)=1-e^{-2x}$.

a) Montrer que : $(\forall x\in\mathrm{I})$; $0<G'(x)\le\frac{2}{e}$.

b) Vérifier que $G(\alpha)=\alpha$ et montrer que $G(\mathrm{I})\subset\mathrm{I}$.

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=G(u_n)$.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\in\mathrm{I}$.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{2}{e}\right)^n$ puis en déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Partie III :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}\ ;\ x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

Et soit (Γ_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la partie I.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$; $f'(x)=\dfrac{e^{-4x}}{x^2}\left[(4x+1)-(2x+1)e^{2x}\right]$.

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)$; $f(x)=2g(2x)-g(x)$.

b) En déduire que la fonction f est dérivable à droite en 0 et déterminer le nombre dérivé $f_d'(0)$.

4) Construire la courbe (Γ_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) a) Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! x_n \in]0,2[) : f^{-1}(x_n) = n$.

c) Etudier la monotonie de la suite (x_n) et en déduire qu'elle est convergente puis calculer sa limite.