Exercice 1 (SN2008)

Soit a un nombre complexe non nul et $\bar{a}$ son conjugué.

I – On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $(G): iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$

1) a) Vérifier que le discriminent de l'équation (G) est : $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (G).

2) Montrer que a est une solution de l'équation (G) si et seulement si $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

II – Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On suppose que $\mathrm{Re}(a)\neq\mathrm{Im}(a)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives a, $i\bar{a}$ et $1+ia$.

1) On pose $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}$

a) Vérifier que : $\bar{Z}=\dfrac{(1-i)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

2) On suppose dans cette question que $\mathrm{Im}(a)\neq\dfrac{1}{2}$

On considère la rotation R_1 de centre le point A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et la rotation R_2 de centre le point A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose $B'=R_1(B)$ *et* $C'=R_2(C)$ et soit E le milieu du segment $[BC]$.

a) Déterminer b' et c' les affixes respectives des points B' et C' .

b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que $B'C'=2AE$.

Exercice 2 (SR2008)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application $r: M(z)\mapsto M_1(z_1)$ tel que: $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

On considère l'application $h: M(z)\mapsto M_2(z_2)$ tel que: $z_2=-2z+3i$. On pose $F=h\circ r$.

1) Déterminer la nature de chacune des deux applications r et h et leurs éléments caractéristiques.

2) On considère les points $\Omega(i)$ et $\mathrm{A}(a)$ où a est un nombre complexe tel que $a\neq i$.

On pose $\mathrm{B}=\mathrm{F}(\mathrm{A})$, $\mathrm{C}=\mathrm{F}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{F}(\mathrm{C})$.

a) Montrer que si le point $\mathrm{M}'(z')$ est l'image du point $\mathrm{M}(z)$ par l'application F, alors :

$$z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$$

b) Etablir que Ω est le seul point qui vérifie $F(\Omega)=\Omega$

3) a) Déterminer en fonction du nombre complexe a les nombres complexes b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.

c) Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.

d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D soit un point de l'axe des réels.

Exercice 3 (SN2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3+4i$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): 4z^2-10iz-7-i=0$.

2) Soient a et b les deux solutions de l'équation (E) telles que $\operatorname{Re}(a)<0$ et soient A et B les images respectives de a et b.

a) Vérifier que : $\dfrac{b}{a}=1-i$.

b) En déduire que le triangle AOB est isocèle et rectangle en A.

3) Soit C un point d'affixe c, distinct du point A. Et soit D l'image du point B par la rotation R de Centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

a) Déterminer en fonction de c le nombre complexe d l'affixe du point D.

b) Déterminer en fonction de c le nombre complexe l l'affixe du point L.

c) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{l-c}{a-c}$, puis en déduire la nature du triangle ACL.

Exercice 4 (SN2011)

Partie I :

Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z,

$$(E_m): z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

1) Vérifier que le nombre complexe $z_1=-m+2$ est une solution de l'équation (E_m).

2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m).

a) Montrer que : $z_1z_2=1 \Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$

b) Déterminer les deux valeurs de m telles que : $z_1z_2=1$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application s qui associe à chaque point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que :

$z'-1=-(z-1)$; et soit la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de son angle. Et soit z'' l'affixe du point $\mathrm{M}''=\mathrm{R}(\mathrm{M})$

1) a) Montrer que l'application s est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

b) Montrer que : $z''=iz+2$

2) On suppose que le point M est distinct de O l'origine du repère et soit A le point d'affixe 2.

a) Calculer $\frac{z''-2}{z'-2}$ puis en déduire la nature du triangle $\mathrm{AM'M''}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points A, Ω, $\mathrm{M'}$ et $\mathrm{M''}$ soient cocycliques.