Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+7x+10}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2021}-2021x+2020}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-1|}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2+3x\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-2x}-x^2+4x-5}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^4}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{9x^2+2x-1}-4x+6$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-8x+3}+3x-3$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)-\sin x}{\sin(5x)-\sin x}$;

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+(a+1)x-3}{x^2+x} \; ; x<-1 \\ f(x)=\dfrac{-2x+b}{\sqrt{2+x^2}+1} \quad x\geq -1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

2) Discuter suivant les valeurs du paramètre a la limite $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, puis déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que la fonction f admette une limite en -1.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=2$

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right) : |g(x)|\leq \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x}$

c) Déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

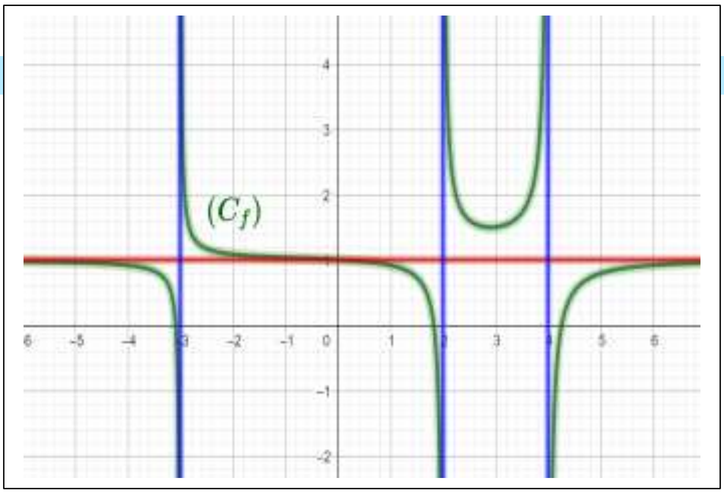
Exercice 4

La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

A partir du graphique, calculer :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$



Exercice 5

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}-mx \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+2}-mx$$

Exercice 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{|x|-E(x)}}{x^2}$

1) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right): 0\le h(x)\le \dfrac{1}{x^2}$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{-*}\right): 0\le h(x)\le \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x^2}$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

Exercice 7

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Déterminer l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

b) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

4) Soit $p\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

a) Déterminer l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $\left]\dfrac{1}{(p+1)^2},\dfrac{1}{p^2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{p^2},\dfrac{1}{(p-1)^2}\right[$.

b) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{p^2}\right)^-} f(x)$

Exercice 8

1) Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2}=0$

2) Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$

3) Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x-3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x-3=+\infty$

4) Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1}=1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1}=1$