Exercice 1

I – On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): 8z^3+1=0$.

1) Montrer que l'équation (E) équivaut à $(2z+1)(4z^2-2z+1)=0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

II – On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $a=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $b=-\frac{1}{8}+i\frac{\sqrt{3}}{8}$ et $c=-\frac{1}{2}$

1) a) Ecrire le nombre complexe a sous forme exponentielle

b) Vérifier que : $a^2=b$

c) En déduire que : $\arg(b)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2) a) Montrer que : $\frac{b-a}{a}=i\sqrt{3}$

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle en B

3) Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Montrer que : $z'=ze^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Montrer que le point C est l'image de A par la rotation R.

c) Montrer que le point B est le milieu du segment $[AC]$

Exercice 2 (SN2009)

On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives $a=2-2i$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ et $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes a et b.

2) Soit R la rotation de centre le point O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R. Montrer que : $z'=bz$.

b) Vérifier que le point C est l'image de A par la rotation R.

3) Montrer que : $\arg(c)\equiv\arg(a)+\arg(b)[2\pi]$ puis déterminer un argument de c.

Exercice 3 (SR2009)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+25=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=3+4i$, $b=3-4i$, $c=2+3i$ et $d=5+6i$.

a) Calculer $\frac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

b) Montrer que le nombre complexe $p=3+8i$ est l'affixe du point P l'image de A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{d-p}{a-p}$, puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$.

Exercice 4 (SR2008)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-8z+17=0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, et B d'affixes respectives : $a=4+i$ et $b=8+3i$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' l'image de M par la rotation R de centre le point Ω d'affixe $\omega=1+2i$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

a) Montrer que : $z'=-iz-1+3i$.

b) Vérifier que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $c=-i$.

c) Montrer que : $b-c=2\left(a-c\right)$ puis déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 5

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(z)=z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$$

1) Montrer que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=2cm$.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A=1+i\ ,\ z_B=1-i\ ,\ z_J=i\sqrt{2}\ \ et\ \ z_K=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

1) Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe du point L est égale à $-\sqrt{2}$.

3) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et Le rayon.

4) Soit D le point d'affixe $z_D=-1+i$ et soit R la rotation de centre O qui transforme J en D.

a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R.

b) Soit C l'image du point L par la rotation R. Déterminer l'affixe de C.

5) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? justifier la réponse.

Exercice 6

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $4z^2-12z+153=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3+\frac{1}{4}i$ et $z_P=3+2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q l'image du point B par la translation t de vecteur $\vec{w}$.

b) Déterminer l'affixe z_R du point R l'image du point P par l'homothétie de centre C et de rapport $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S l'image du point P par la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Puis placer les points A, B, C, P, Q, R et S.

3) a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$, puis en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera l'affixe ω de son centre Ω et son rayon r.

4) La droite (AB) est-elle tangente au cercle (C).