Exercice 1 (Anfa : S.Février 1997)

On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \quad ; \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

1) Calculer l'intégrale I.

2) Montrer que : $I=2J-\frac{1}{2}$ puis calculer l'intégrale J.

3) a) Montrer que : $K=-I+2J$ puis calculer K.

b) En utilisant un changement de variable en posant $t=\operatorname{Arctan} x$, calculer K (encore).

4) Calculer l'intégrale L. (On peut poser $t=x+2$)

Exercice 2 (Settat : S.Juin1997)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère Les intégrales $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n}dx$ et $J_n=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}dx$.

1) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): 0\le I_n\le \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2) a) Vérifier que : $\left|\int_0^{\pi}\frac{n\sin x}{x+n}dx-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right|=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}dx$

b) Montrer que : $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{x+n}dx\le\frac{2\pi}{n}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Exercice 3 (Settat : S.Juin1997)

1) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. On pose : $I(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}dt$ et $J(x)=\int_0^x\frac{-t^2}{1+t}dt$.

a) Calculer $I(x)$ et $J(x)$ en fonction de x.

b) Déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right): x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

2) Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}\ ;\ x>0 \text{ et } x\neq 1 \\ g(1)=1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est dérivable à droite au point d'abscisse $x_0=1$. (On peut poser $x=1+h$)

3) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\right): 1-x+\ln x<0$.

b) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\right): g\left(\frac{1}{2}\right)\times g(x)<1$

Exercice 4 (Ben Msik : S.Février1998)

On pose : $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x)^2}dx$ et $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$

1) Calculer I_0

2) Calculer I_1 en utilisant le changement de variable $t=1-x$.

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): I_n=-\frac{1}{2^n(n+1)}+\frac{n}{n+1}\times I_{n-1}$$

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): I_n=\dfrac{1}{2^n(n+1)}$.

Exercice 5 (Anfa : S.Juin1998)

1) Calculer l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ (On peut utiliser une intégration par parties)

2) Calculer l'intégrale : $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}dx$ (On peut poser : $t=\tan\dfrac{x}{2}$).

3) Calculer la limite de la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$$

Exercice 6 (Anfa : S.Juin 1998)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x} ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (Il n'est pas demandé de déterminer le point d'inflexion).

3) Montrer que la fonction f admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\left(\forall x>0\right): F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

2) On pose : $\left(\forall x>0\right): I(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}f(t)dt$.

a) Montrer que : $\left(\forall x\geq 1\right): \dfrac{\ln 2}{2x-\ln(2x)}\leq I(x)\leq\dfrac{\ln 2}{x-\ln x}$, puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

b) Montrer que : $\left(\forall x\geq 1\right): F(x)-I(x)=\ln\left(1+\dfrac{x-\ln 2}{x-\ln x}\right)$, puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe de la fonction f et les droites d'équations respectives $y=0$, $x=\alpha$ et $x=2\alpha$.

Déterminer la valeur de α pour que l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ soit maximale.