Exercice 1

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$.

2) On pose : $a=2\left(\sqrt{3}+i\right)$, $b=1+i$ et $c=2\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

a) Ecrire chacun des nombres complexes a et $\frac{b}{c}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire que a^{15} est un nombre imaginaire pur.

c) Montrer que : $\frac{ab}{c}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

d) Ecrire le nombre complexe $\frac{ab}{c}$ sous forme algébrique.

e) En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 2

On considère le polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'inconnu Z :

$$P(z)=z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i$$

1/ Montrer que le polynôme $P(z)$ Admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

2/ Déterminer les réels a et b tels que : $\forall z\in\mathbb{C};\ P(z)=(z-z_0)\left(z^2+az+b\right)$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$

Exercice 3

Soient $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i$ deux nombres complexes.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

2) Soit le nombre complexe $z_3=\frac{z_1}{z_2}$. Ecrire z_3 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$a=2\sqrt{3}+9i,\ b=-i,\ c=-4\sqrt{3}-9i \text{ et } d=-2\sqrt{3}+i$$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 5

I - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+25=0$

II - Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$,on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2+i$, $z_B=3+4i$ et $z_C=6+3i$.

1) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ et en déduire une mesure de l'angle

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

2) Soit R la rotation de center B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation R

b) Vérifier que le point A est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC

3) Soit D l'image du point C par la translation T qui transforme B en A

a) Montrer que $z_D = 5$

b) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$ et en déduire la nature du quadrilatère ABCD

Exercice 6 (SN2008)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 34 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = 3-5i$ et $c = 7+3i$.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(z')$ son image par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

a) Montrer que $z' = z + 4 - 2i$

b) Montrer que le point C est l'image de A par la translation T.

c) Prouver que : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$.

d) Déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

Exercice 7

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$(E) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0$$

1) a) Montrer que $z_0 = 2$ est une solution de l'équation (E).

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$$

2) a) Résoudre l'équation (E).

b) Ecrire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Placer, dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2-2i\ ,\quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2+2i$$

2) Calculer z_C l'affixe du point C tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer le point C.

3) Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Et soit F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer z_{E} et z_{F} les affixes respectives des points E et F.

b) Placer les points E et F.

4) a) Vérifier que : $\frac{z_{\mathrm{F}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{E}}-z_{\mathrm{A}}}=i$

b) En déduire la nature du triangle AEF.

5) Soit I le milieu du segment $[\mathrm{EF}]$.

Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation R de centre I et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.