Exercice 1

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)=\dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$

4) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-1$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

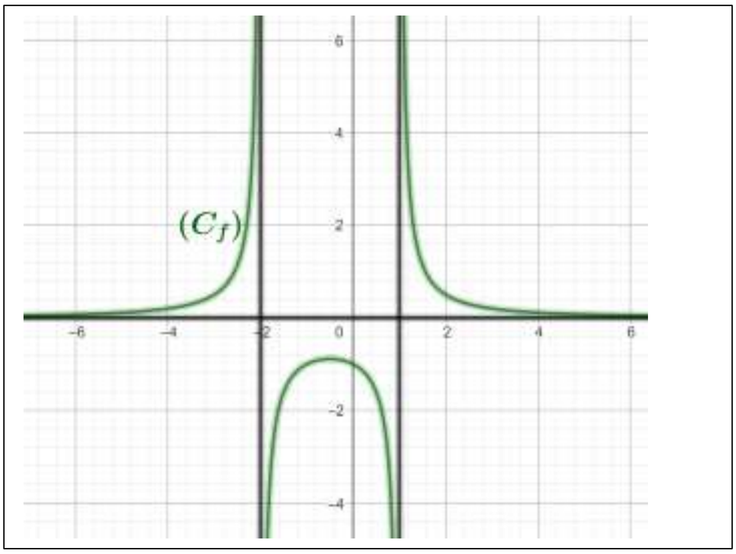
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \;;\; \lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \;;\; \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} \;;\; \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^5-1} \;;$$

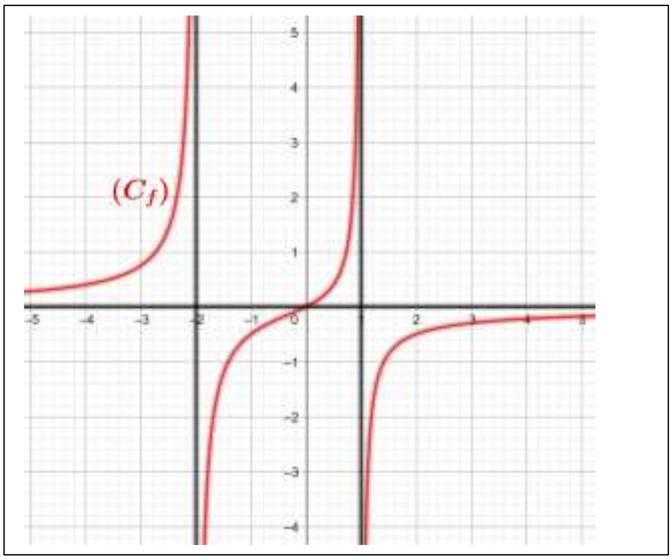
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^9-1} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)} \;;\; \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \;;\; \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \;;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)}{x^2} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{2x+3\sin x}{5\tan x-x} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2} \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} \;;\; \lim_{x\to -\infty} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 3

Par lecture graphique déterminer les limites en $-\infty, +\infty, -2^-, -2^+, 1^-$ et 1^+ de la fonction f dans chacun des cas suivants :





Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x+1}$

1) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[) : \left|f(x)-2\right|\leq \dfrac{3}{x}$

2) Déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x(2+\cos x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

1) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[) : g(x)\geq 4x^2$

2 Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Exercice 6

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{E(x)+\sin x}{x}$

1) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\dfrac{x-2}{x}\leq h(x)\leq\dfrac{x+1}{x}$

2) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

Exercice 7

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\sin x.E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que peut-on déduire ?

2) En déduire $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=x\sqrt{\left(1+E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2+1}$.

1) Etudier la limite de la fonction g en 0

2) Etudier les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x^2.E\left(\dfrac{1}{x}\right)}{E\left(\dfrac{-2}{x}\right)+x^2}\ ;\quad \lim_{x\to0} x^2\left(1+2+3+...+E\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)\ ;\quad \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{10+x}-x}{\sin(x\pi)}\ ;$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2-|x^2-x|}{5x|x^2-4|+2|x+3|+11}\ ;\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2E\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}{x^2-E\left(\dfrac{-5}{x}\right)}\ ;\quad \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x-2}-6}{x^2-9}\ ;$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}-5}{x-1}\ ;\quad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2x}}-2}{2-x}\ ;\quad \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2}.$$