



I – Dérivabilité d'une fonction en un point

1 – Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en un nombre réel x_0 .

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ ($L \in \mathbb{R}$).

Le nombre L est appelé **le nombre dérivé** de la fonction f en x_0 et est noté $f'(x_0) = L$. On a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemples

Montrer que la fonction f est dérivable en x_0 , et déterminer le nombre dérivé $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = x^2 + x + 2, x_0 = 1 \quad ; \quad 2) f(x) = \frac{x+2}{x+1}, x_0 = 0 \quad ; \quad 3) f(x) = \sqrt{x+3}, x_0 = 1$$

Remarque

Si on pose $x = x_0 + h$, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert

Centré en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans

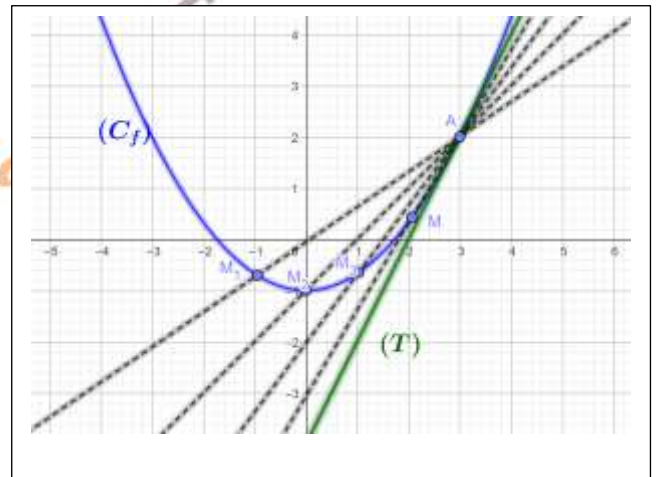
Un repère orthonormé.

Soit $A(x_0, f(x_0))$ un point de la courbe (C_f) et

$M(x, y)$ un autre point de (C_f) .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 , alors le point M s'approche de plus en plus du point A . Par suite le taux de variation entre x et x_0 tend vers $f'(x_0)$ et la droite (AM) tend vers la droite (T) qui s'appelle **la tangente de la courbe** (C_f) au point d'abscisse x_0 .

2 - Approximation d'une fonction dérivable

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 et dérivable en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de la fonction f au voisinage de x_0 .

Autrement dit : $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ pour tout x très proche de x_0

Remarque

En posant $x = x_0 + h$, on a $f(x_0 + h) \approx f'(x_0) \times h + f(x_0)$ pour tout h très proche de 0.

Exemples



Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable en $x_0 = 3$ et déterminer $f'(3)$

b) Donner une valeur approchée de $\frac{2}{\sqrt{4,02}}$

Proposition (Tangente à une courbe en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 et dérivable en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La courbe (C_f) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation :

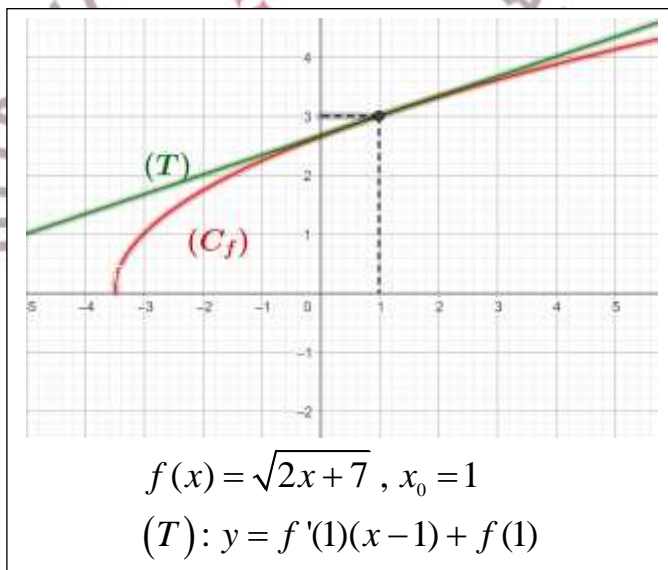
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemples

Montrer que la courbe (C_f) représentative de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse x_0

Dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$



Remarque

- ◆ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 .
- ◆ Si $f'(x_0) = 0$, alors la courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f(x_0)$.

II – Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + r[$ où $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que **la fonction f est dérivable à droite en x_0** , si et seulement s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Le nombre réel L s'appelle **le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0** et se note $f'_d(x_0)$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0]$ où $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que **la fonction f est dérivable à gauche en x_0** , si et seulement si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L.$$

Le nombre réel L s'appelle **le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0** et se note $f'_g(x_0)$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si

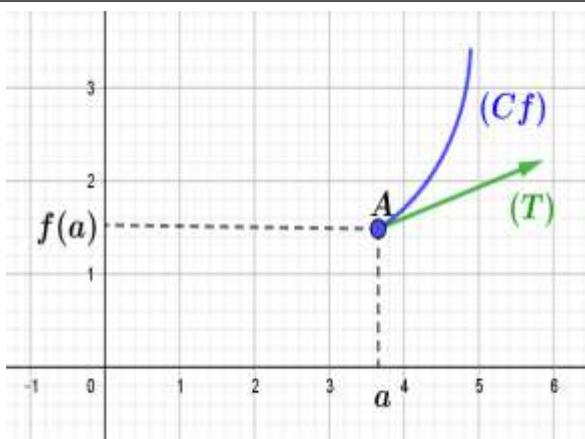
$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$
Exemples

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 , dans chacun des cas suivants :

$$1) \begin{cases} f(x) = \sin x & ; x \geq 0 \\ f(x) = 2x^2 + x & ; x < 0 \end{cases}, x_0 = 0 \quad ; \quad 2) f(x) = |x^2 - x|, x_0 = 1$$

III – Interprétation graphique du nombre dérivé

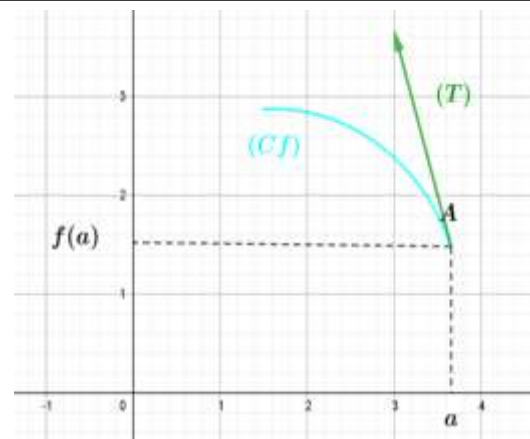
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$, on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$, alors la courbe

(C_f) admet une demi-tangente à droite du point d'abscisse x_0 d'équation

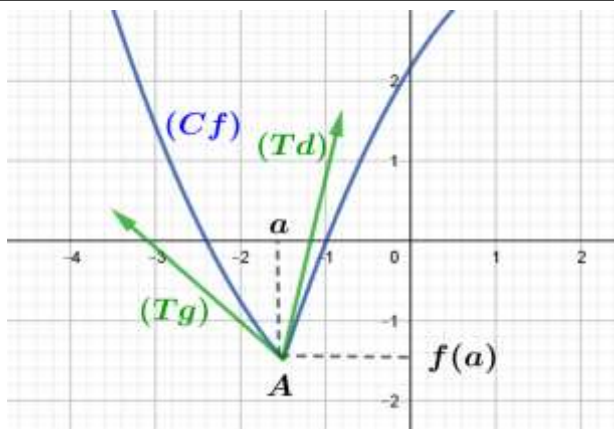
$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$, alors la courbe

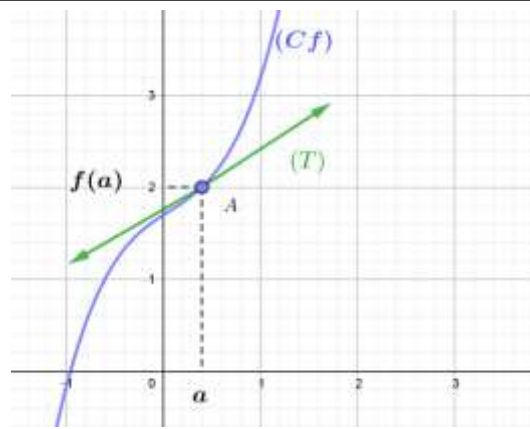
(C_f) admet une demi-tangente à gauche du point d'abscisse x_0 , d'équation

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



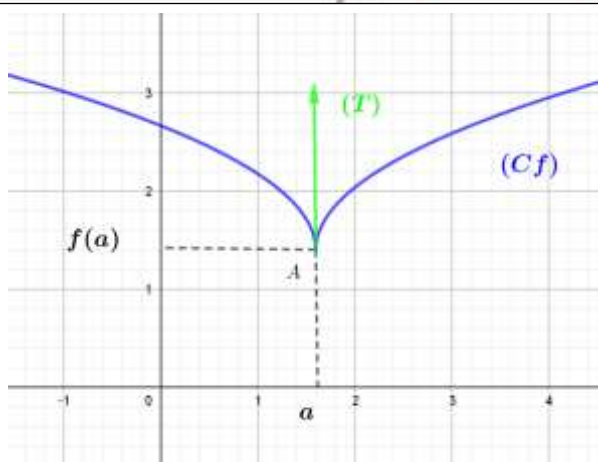
$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \\ f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0) \end{cases}, \text{ alors la courbe}$$

(C_f) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse x_0 . On dit que le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux



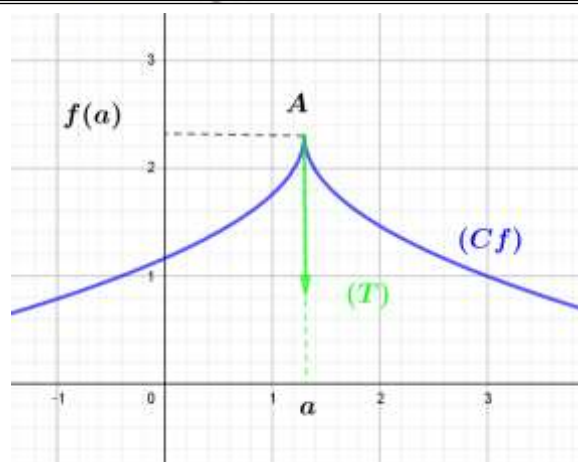
$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0) \end{cases}, \text{ alors la courbe}$$

(C_f) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

, alors la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut à droite du point $A(x_0; f(x_0))$ ou à gauche du point $A(x_0; f(x_0))$



$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

alors la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale orientée vers le bas à droite du point $A(x_0; f(x_0))$ ou à gauche du point $A(x_0; f(x_0))$

IV – Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle – Dérivée d'une fonction

1 – Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

La fonction f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout élément de I

La fonction définie sur I telle que : $x \mapsto f'(x)$ est appelée **la fonction dérivée de f** elle est notée f'



Proposition (Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle)

Soit f une fonction et a et b deux réels tels que $a < b$. Alors :

- ★ f est dérivable sur $]a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]a, b[$
- ★ f est dérivable sur $[a, b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $[a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]a, +\infty[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]a, +\infty[$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]-\infty, b]$
- ★ f est dérivable sur $[a, +\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, +\infty[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]-\infty, b[\\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty, +\infty[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]-\infty, +\infty[$

2 – Dérivées des fonctions usuelles

Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
a (constante)	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}
x	\mathbb{R}	1	\mathbb{R}
$ax + b$	\mathbb{R}	a	\mathbb{R}
x^2	\mathbb{R}	$2x$	\mathbb{R}
x^3	\mathbb{R}	$3x^2$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^3}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{3}{x^4}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}^*	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*



\sqrt{x}	$[0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}

3 – Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1

- ★ Toute fonction polynôme est dérivable sur chaque intervalle de \mathbb{R} .
- ★ Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- ★ Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur chaque intervalle de \mathbb{R} .
- ★ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ et est dérivable sur chaque intervalle de $]0, +\infty[$.

Proposition 2

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et α et β deux nombres réels. Alors :

- ★ La fonction : $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ est dérivable sur chaque intervalle de I .
- ★ Si en plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors les fonctions $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ et $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ sont dérivables sur chaque intervalle de I .
- ★ Si en plus $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est dérivable sur chaque intervalle de I .

Opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α et β deux nombres réels. Alors :

$f(x)$	$f'(x)$
$\alpha u + \beta v$	$\alpha u' + \beta v'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{v}$ ($\forall x \in I, v(x) \neq 0$)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{\alpha}{v}$ ($\forall x \in I, v(x) \neq 0$)	$-\frac{\alpha v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ ($\forall x \in I, v(x) \neq 0$)	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in I, u(x) \neq 0$)	$-\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$
\sqrt{u} ($\forall x \in I, u(x) > 0$)	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(\alpha x + \beta)$ ($\alpha x + \beta \in I$)	$\alpha \times u'(\alpha x + \beta)$

V – Dérivées successives d'une fonction

Définition



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

- ▲ On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est dérivable sur I .
- ▲ La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f et est notée f''
- ▲ Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, la fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f , qu'on note par $f^{(n)}$, est définie par récurrence comme suit :
 - * $f^{(0)} = f$
 - * Pour tout entier naturel non nul n , la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est $(n-1)$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I , On pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Exemples

1) Déterminer $f''(x)$ dans chacun des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$; b) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$; c) $f(x) = \cos x$; $f(x) = \tan x$

2) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

VI – Applications de la dérivation

1 – Monotonie d'une fonction sur un intervalle

Proposition 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ★ Si la fonction f est croissante (ou strictement croissante) sur I , alors : $(\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$.
- ★ Si la fonction f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I , alors : $(\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$.
- ★ Si la fonction f est constante sur I , alors : $(\forall x \in I) : f'(x) = 0$.

Proposition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ★ Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de I , alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- ★ Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de I , alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- ★ Si f' est nulle sur I , alors la fonction f est constante sur I .

Remarques

- ◆ Généralement, pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.
- ◆ Le tableau de variation est dressé après avoir étudié le signe de la dérivée de la fonction.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

- a) Etudier les variations de la fonction f .
- b) Dresser son tableau de variation.



2) Soit g la fonction définie sur $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

- Etudier le sens de variation de la fonction g sur D
- Calculer les limites de g aux bornes de D
- Dresser le tableau de variations de g .

2 – Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition et $a \in D_f$.

- ▲ On dit que $f(a)$ est un maximum relatif de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(a)$
- ▲ On dit que $f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(a)$
- ▲ Si on a : $(\forall x \in D_f), f(x) \leq f(a)$, on dit alors que $f(a)$ est un maximum absolu de la fonction f en a .
- ▲ Si on a : $(\forall x \in D_f), f(x) \geq f(a)$, on dit alors que $f(a)$ est un minimum absolu de la fonction f en a .
- ▲ Dire que $f(a)$ est un extremum de la fonction f en a signifie que $f(a)$ est un maximum local ou un minimum local de f en a .

Exemple

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-contre :

x	-6	-2	3	6
$f(x)$	-2	1	-4	0

On a $f(-2) = 1$ est un maximum local car : $(\forall x \in]-6, 3[), f(x) \leq 1$

Et on a $f(3) = -4$ est un minimum local car : $(\forall x \in]2, 6[), f(x) \geq -4$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I .

- ★ Si $f(x_0)$ est un extremum de f en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- ★ Si $f'(x_0) = 0$ et la fonction f' change de signe en x_0 , alors $f(x_0)$ est un extremum de la fonction f en x_0 .

VII – Equation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction y où y'' est sa dérivée seconde, s'appelle **une équation différentielle**.

Résoudre une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ consiste à déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

Proposition

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ où ω un nombre réel non nul.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La fonction f , ainsi définie, s'appelle la solution générale de l'équation différentielle (E) .

Remarque

Si en plus on ajoute la condition $f(x_0) = a$ et $f'(t_0) = b$, alors l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f .

Exemples

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$

2) Déterminer la fonction f qui est solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ qui vérifie les conditions $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

