I – Dérivabilité d'une fonction en un point

1 – Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en un nombre réel x_0.

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L$ ($L \in \mathbb{R}$).

Le nombre L est appelé **le nombre dérivé** de la fonction f en x_0 et est noté $f'(x_0) = L$. On a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Exemples

Montrer que la fonction f est dérivable en x_0, et déterminer le nombre dérivé $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + x + 2,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1},\ x_0 = 0$; 3) $f(x) = \sqrt{x+3},\ x_0 = 1$

Remarque

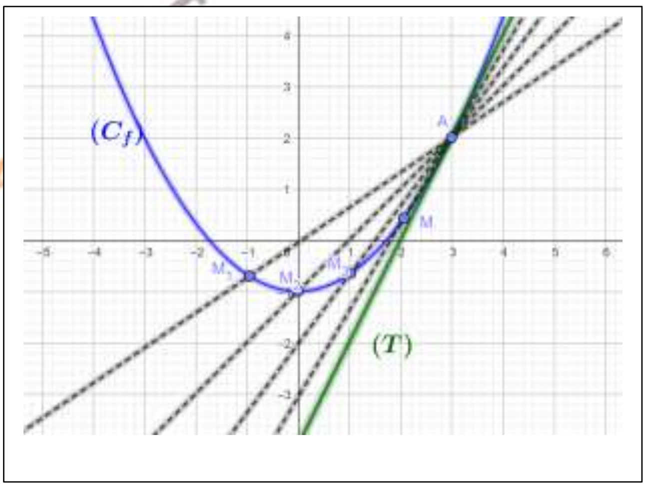
Si on pose $x = x_0 + h$, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert Centré en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans Un repère orthonormé.

Soit $A(x_0, f(x_0))$ un point de la courbe (C_f) et $M(x, y)$ un autre point de (C_f).

Le coefficient directeur de la droite (AM) est $m = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



Lorsque x s'approche de plus en plus de x_0, alors le point M s'approche de plus en plus du point A
Par suite le taux de variation entre x et x_0 tend vers $f'(x_0)$ et la droite (AM) tend vers la droite (T) qui s'appelle **la tangente de la courbe** (C_f) au point d'abscisse x_0.

2 - Approximation d'une fonction dérivable

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 et dérivable en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de la fonction f au voisinage de x_0.
Autrement dit : $f(x) \simeq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ pour tout x très proche de x_0

Remarque

En posant $x = x_0 + h$, on a $f(x_0+h) \simeq f'(x_0) \times h + f(x_0)$ pour tout h très proche de 0.

Exemples

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable en $x_0=3$ et déterminer $f'(3)$

b) Donner une valeur approchée de $\dfrac{2}{\sqrt{4,02}}$

Proposition (Tangente à une courbe en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0 et dérivable en x_0 et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La courbe (C_f) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation :

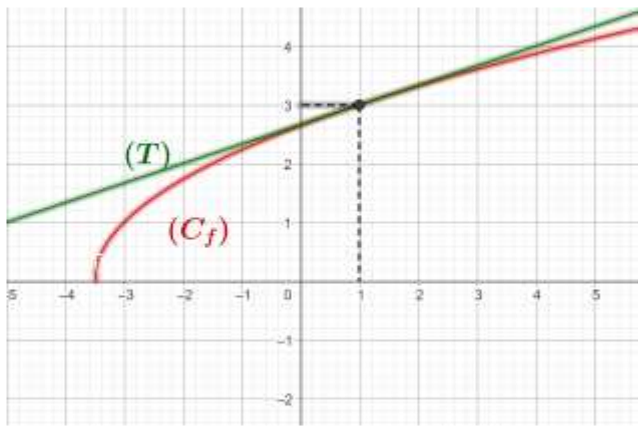
$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exemples

Montrer que la courbe (C_f) représentative de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse x_0

Dans chacun des cas suivants :

$a)$ $f(x)=\sqrt{2x+7}$, $x_0=1$; $b)$ $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$, $x_0=0$; $c)$ $f(x)=\sin x$, $x_0=0$



$f(x)=\sqrt{2x+7}$, $x_0=1$

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Remarque

- Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0.
- Si $f'(x_0)=0$, alors la courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0 d'équation $y=f(x_0)$.

II – Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0,x_0+r[$ *où* $r>0$ et $x_0\in\mathbb{R}$.

On dit que **la fonction f est dérivable à droite en** x_0, si et seulement s'il existe $L\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L.$$

Le nombre réel L s'appelle **le nombre dérivé de la fonction f à droite en** x_0 et se note $f_d'(x_0)$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0]$ où $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que **la fonction** f **est dérivable à gauche en** x_0, si et seulement s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$.

Le nombre réel L s'appelle **le nombre dérivé de la fonction** f **à gauche en** x_0 et se note $f_g'(x_0)$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f_d'(x_0) = f_g'(x_0) \end{cases}$

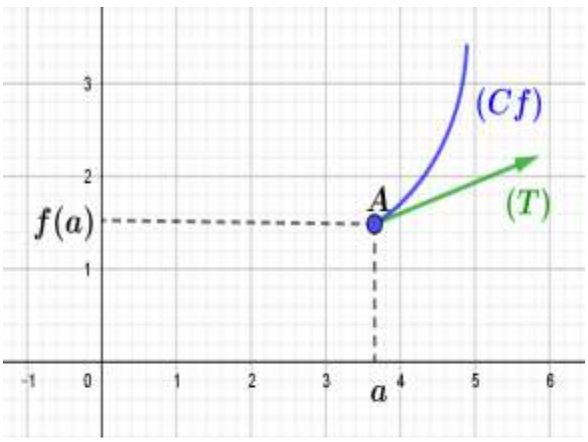
Exemples

Etudier la dérivabilité de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x) = \sin x & ; x \geq 0 \\ f(x) = 2x^2 + x & ; x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = |x^2 - x|$, $x_0 = 1$

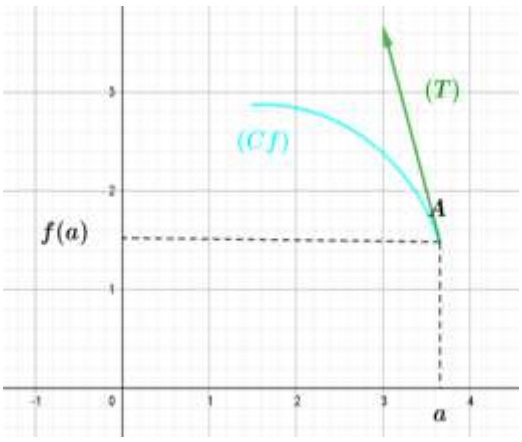
III – Interprétation graphique du nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$, on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



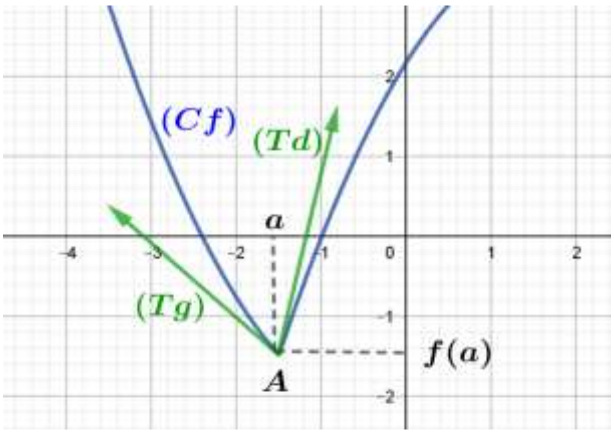
Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0)$, alors la courbe (C_f) admet une demi-tangente à droite du point d'abscisse x_0 d'équation

$$\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



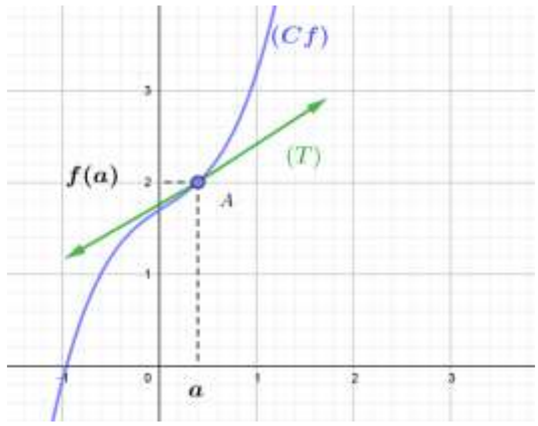
Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_g'(x_0)$, alors la courbe (C_f) admet une demi-tangente à gauche du point d'abscisse x_0 , d'équation

$$\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



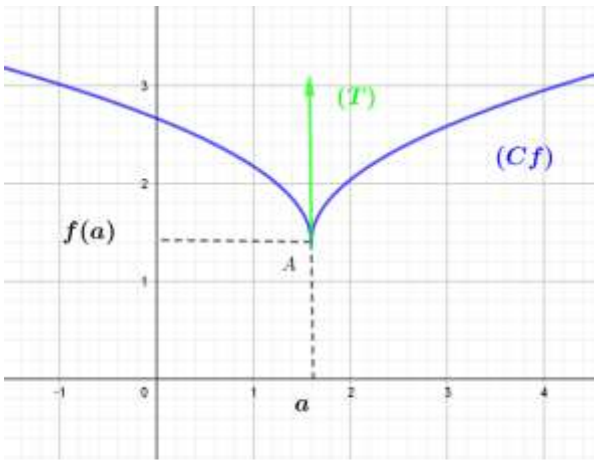
Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) \\ f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0) \end{cases}$, alors la courbe

(C_f) admet deux demi - tangentes au point d'abscisse x_0. On dit que le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux



Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$, alors la courbe

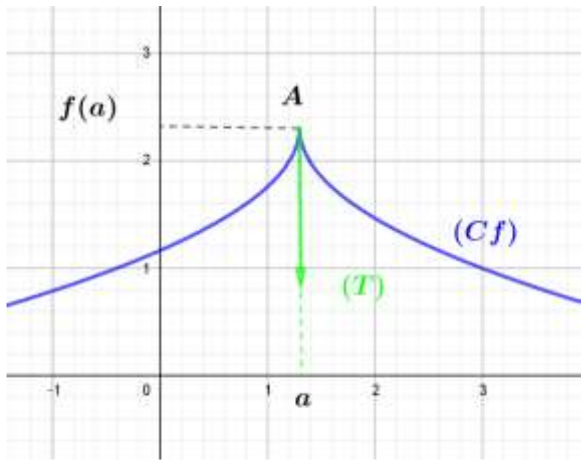
(C_f) admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$



Si

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$

, alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le haut à droite du point $A(x_0; f(x_0))$ ou à gauche du point $A(x_0; f(x_0))$



Si

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$

alors la courbe (C_f) admet une demi – tangente verticale orientée vers le bas à droite du point $A(x_0; f(x_0))$ ou à gauche du point $A(x_0; f(x_0))$

IV – Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle – Dérivée d'une fonction

1 – Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

La fonction f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout élément de I

La fonction définie sur I telle que : $x \mapsto f'(x)$ est appelée **la fonction dérivée de** f elle est notée f'

Proposition (Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle)

Soit f une fonction et a et b deux réels tels que $a<b$. Alors :

- ★ f est dérivable sur $]a,b[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]a,b[$
- ★ f est dérivable sur $[a,b[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]a,+\infty[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]a,+\infty[$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty,b[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]-\infty,b[$
- ★ f est dérivable sur $[a,+\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,+\infty[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]-\infty,b[\\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$
- ★ f est dérivable sur $]-\infty,+\infty[\Leftrightarrow f$ est dérivable en chaque élément de $]-\infty,+\infty[$

2 – Dérivées des fonctions usuelles

Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
a (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{3}{x^4}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n} \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

$\sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

3 – Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1

- ★ Toute fonction polynôme est dérivable sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.
- ★ Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- ★ Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$ et est dérivable sur chaque intervalle de $]0,+\infty[$.

Proposition 2

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et α et β deux nombres réels. Alors :

- ★ La fonction : $x \mapsto \alpha f(x)+\beta g(x)$ est dérivable sur chaque intervalle de I.
- ★ Si en plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors les fonctions $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ *et* $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ sont dérivables sur chaque intervalle de I.
- ★ Si en plus $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est dérivable sur chaque intervalle de I.

Opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α et β deux nombres réels. Alors :

$f(x)$	$f'(x)$
$\alpha u+\beta v$	$\alpha u'+\beta v'$
$u \times v$	$u' \times v+u \times v'$
$\frac{1}{v} \quad (\forall x \in I,\ v(x) \neq 0)$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{\alpha}{v} \quad (\forall x \in I,\ v(x) \neq 0)$	$-\frac{\alpha v'}{v^2}$
$\frac{u}{v} \quad (\forall x \in I,\ v(x) \neq 0)$	$\frac{u' \times v-u \times v'}{v^2}$
$u^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in I,\ u(x) \neq 0)$	$-\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u} \quad (\forall x \in I,\ u(x)>0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(\alpha x+\beta) \quad (\alpha x+\beta \in I)$	$\alpha \times u'(\alpha x+\beta)$

V – Dérivées successives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

- On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est dérivable sur I.
- La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f et est notée f''
- Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, la fonction dérivée $n^{ième}$ de la fonction f, qu'on note par $f^{(n)}$, est définie par récurrence comme suit :
  - $f^{(0)} = f$
  - Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est $(n-1)$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, On pose $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

Exemples

1) Déterminer $f''(x)$ dans chacun des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x) = x^3 + x^2 - x + 5 \quad ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad ; \quad c)\ f(x) = \cos x \quad ; \quad f(x) = \tan x$$

2) Montrer par récurrence que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right): \cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right): \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

VI – Applications de la dérivation

1 – Monotonie d'une fonction sur un intervalle

Proposition 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ★ Si la fonction f est croissante (ou strictement croissante) sur I, alors : $\left(\forall x \in I\right): f'(x) \geq 0$.
- ★ Si la fonction f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I, alors : $\left(\forall x \in I\right): f'(x) \leq 0$.
- ★ Si la fonction f est constante sur I, alors : $\left(\forall x \in I\right): f'(x) = 0$.

Proposition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ★ Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- ★ Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini d'éléments de I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
- ★ Si f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.

Remarques

- ♦ Généralement, pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.
- ♦ Le tableau de variation est dressé après avoir étudié le signe de la dérivée de la fonction.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Dresser son tableau de variation.

2) Soit g la fonction définie sur $D =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur D

b) Calculer les limites de g aux bornes de D

c) Dresser le tableau de variation s de g .

2 – Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition et $a \in D_f$.

- On dit que $f(a)$ est un maximum relatif de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que : $(\forall x \in \mathrm{I}),\ f(x) \le f(a)$
- On dit que $f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que : $(\forall x \in \mathrm{I}),\ f(x) \ge f(a)$
- Si on a : $(\forall x \in D_f),\ f(x) \le f(a)$, on dit alors que $f(a)$ est un maximum absolu de la fonction f en a.
- Si on a : $(\forall x \in D_f),\ f(x) \ge f(a)$, on dit alors que $f(a)$ est un minimum absolu de la fonction f en a.
- Dire que $f(a)$ est un extremum de la fonction f en a signifie que $f(a)$ est un maximum local ou un minimum local de f en a.

Exemple

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci-contre :

x	-6		-2		3		6
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-4	↗	0

On a $f(-2) = 1$ est un maximum local car : $(\forall x \in]-6,3[),\ f(x) \le 1$

Et on a $f(3) = -4$ est un minimum local car : $(\forall x \in]2,6[),\ f(x) \ge -4$

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I.

- ★ Si $f(x_0)$ est un extremum de f en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- ★ Si $f'(x_0) = 0$ et la fonction f' change de signe en x_0, alors $f(x_0)$ est un extremum de la fonction f en x_0.

VII – Equation differentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ d'inconnue la fonction y où y'' est sa dérivée seconde, s'appelle une équation différentielle.

Résoudre une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ consiste à déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

Proposition

On considère l'équation différentielle $(E):\ y''+\omega^2 y=0$ où ω un nombre réel non nul.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f:\ x\mapsto \alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)\quad où\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

La fonction f, ainsi définie, s'appelle la solution générale de l'équation différentielle (E).

Remarque

Si en plus on ajoute la condition $f(x_0)=a\ et\ f'(t_0)=b$, alors l'équation différentielle (E): $y''+\omega^2 y=0$ admet une unique solution f.

Exemples

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y=0$

2) Déterminer la fonction f qui est solution de l'équation différentielle $y''+4y=0$ qui vérifie les conditions $f(0)=1\ et\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.