I – Equations et inéquations du premier degré

1 – Equations du premier degré

Définitions

- Une équation du premier degré à une inconnue est toute équation qui s'écrit sous la forme $a\,x+b=0$ où a et b sont deux réels donnés et x est l'inconnue.
- L'expression $ax+b$ est appelée « un binôme ».
- Résoudre l'équation $ax+b=0$ c'est déterminer la valeur de x qui vérifie cette équation.
- L'ensemble des valeurs de x vérifiant l'équation $ax+b=0$ est appelé l'ensemble des solutions de cette équation et est noté habituellement par S

Proposition

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax+b=0$ et S son ensemble de solutions .

- Si $a\neq 0$, alors $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $S=\varnothing$
- Si $a=0$ et $b=0$, alors $S=\mathbb{R}$

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1): 2x-5=0$; $(E_2): 3(x-2)+4=5x+7$; $(E_3): (4-3x)(5x+7)=0$; $(E_4): \frac{3x+5}{2}=\frac{6x-5}{3}$

Réponses

- $(E_1): 2x-5=0 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ *donc* $S=\left\{\frac{5}{2}\right\}$
- $(E_2): 3(x-2)+4=5x+7 \Leftrightarrow 3x-6+4-5x-7=0 \Leftrightarrow -2x-9=0 \Leftrightarrow -2x=9 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{2}$

  Donc $S=\left\{-\frac{9}{2}\right\}$.
- $(E_3): (4-3x)(5x+7)=0 \Leftrightarrow 4-3x=0$ *ou* $5x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-4$ ou $5x=-7$

  $\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ ou $x=-\frac{7}{5}$ donc $S=\left\{-\frac{7}{5},\frac{4}{3}\right\}$.
- $(E_4): \frac{3x+5}{2}=\frac{6x-5}{3} \Leftrightarrow 3(3x+5)=2(6x-5) \Leftrightarrow 9x+15=12x-10$

  $\Leftrightarrow 9x-12x=-10-15 \Leftrightarrow -3x=-25 \Leftrightarrow x=\frac{25}{3}$ donc $S=\left\{\frac{25}{3}\right\}$

2 – Inéquations du premier degré

a – Inéquation du premier degré

Définitions

- Une inéquation du premier degré à une inconnue est toute inéquation qui s'écrit sous la forme $a\,x+b\geq 0,\ ax+b>0,\ ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ où a et b sont deux réels donnés et x est l'inconnue.
- Résoudre une inéquation du premier degré c'est déterminer les valeurs de x qui vérifient cette inéquation.
- L'ensemble des valeurs de x vérifiant une inéquation du premier degré est appelé l'ensemble des solutions de cette inéquation et est noté habituellement par S.

Proposition

On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $ax+b\geq 0$ et S son ensemble de solutions.

★ Si $a>0$, alors $S=\left[-\frac{b}{a},+\infty\right[$

★ Si $a<0$, alors $S=\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right]$

★ Si $a=0$ et $b<0$, alors $S=\varnothing$

★ Si $a=0$ et $b>0$, alors $S=\mathbb{R}$

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1):5x\geq 0$; $(I_2):-3x>0$; $(I_3):7x<0$; $(I_4):-4x\leq 0$; $(I_5):2x-3<0$; $(I_6):-5x+2>0$

Réponses

- $(I_1):5x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty[$ donc $S=[0,+\infty[$
- $(I_2):-3x>0 \Leftrightarrow x<0$ donc $S=]-\infty,0[$
- $(I_3):7x<0 \Leftrightarrow x<0$ donc $S=]-\infty,0[$
- $(I_4):-4x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ donc $S=[0,+\infty[$
- $(I_5):2x-3<0 \Leftrightarrow 2x<3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$ donc $S=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$
- $(I_6):-5x+2>0 \Leftrightarrow -5x>-2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{5}$ donc $S=\left]-\infty,\frac{2}{5}\right[$

b – Signe de *ax+b*

Proposition

On considère le binôme $ax+b$ avec $a\neq 0$.

★ Si $x\in\left[-\frac{b}{a},+\infty\right[$, alors $ax+b$ *et* a ont le même signe.

★ $x\in\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right]$, alors $ax+b$ *et* a ont des signes opposés

Autrement dit : Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Opposé du signe de a	0	Signe de a	

Exemples

1) Etudier le signe des expressions suivantes :

$f(x)=2x-5$; $g(x)=3-4x$; $h(x)=(x-4)(2x+7)$; $u(x)=\frac{3x+2}{x+3}$

II – Systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues

1 – Equation du premier degré à deux inconnues

Définitions

★ Une équation du premier degré à deux inconnues est une équation qui s'écrit sous la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des réels donnés.

- Résoudre une équation du premier degré à deux inconnues consiste à déterminer tous les couples de nombres réels (x, y) qui vérifient cette équation.
- L'ensemble de tous les couples de nombres réels (x, y) qui vérifient cette équation est appelé L'ensemble de solutions de cette équation et est noté habituellement par S.

Exemples

On considère l'équation $(E): 2x - y + 3 = 0$.

1) Vérifier que $(1,5)$ est une solution de (E).

2) Vérifier que $(3,2)$ n'est pas une solution de l'équation (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E).

Réponses

1) On a : $2\times1-5+3=2-5+3=-3+3=0$, donc $(1,5)$ est une solution de l'équation (E).

2) On a : $2\times3-2+3=6+1=7\neq0$ donc $(3,2)$ n'est pas une solution de l'équation (E).

3) $2x-y+3=0 \Leftrightarrow y=2x+3$ donc $S=\{(x,2x+3)/x\in\mathbb{R}\}$

2 – Systèmes d'équations à deux inconnues

a – Définitions

Définition

- Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est un système de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y consiste à déterminer tous les couples (x, y) qui vérifient les deux équations de ce système.
- L'ensemble de tous les couples de nombres réels (x, y) qui vérifient ce système est appelé L'ensemble des solutions de ce système et est noté habituellement par S.
- Le nombre réel $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminent de ce système .

b – Résolution d'un système à deux équations à deux inconnues

- Résolution par la méthode de substitution

Exemple : Résoudre par substitution le système $(S): \begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-5y=1 \end{cases}$

Réponse : $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ 3(2y+3)-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ 6y+9-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-13 \\ y=-8 \end{cases}$

Donc $S=\{(-13,-8)\}$

- Résolution par la méthode des combinaisons linéaires

Exemple : Résoudre par la méthode des combinaisons linéaires le système : $(S): \begin{cases} 3x+4y=7 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

Réponse

$(S):\begin{cases}3x+4y=7 & \times 2\\ 2x+3y=3 & \times(-3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x+8y=14\\ -6x-9y=-9\end{cases}$ donc $(6x+8y)+(-6x-9y)=14+(-9)$

Donc $-y=5$ d'où $y=-5$

Et $(S):\begin{cases}3x+4y=7 & \times 3\\ 2x+3y=3 & \times(-4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x+12y=21\\ -8x-12y=-12\end{cases}$ donc $(9x+12y)+(-8x-12y)=21+(-12)$

Donc $x=9$

Alors $S=\{(-5,9)\}$

❈ Résolution par la méthode des déterminants

Proposition

On considère le système $(S):\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ d'inconnues x et y et a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés. On pose

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-c'b \text{ et } \Delta_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c$$

★ Si $\Delta\neq 0$, alors le système (S) admet une seule solution telle que $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ et on a : $S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$.

★ Si $\Delta=0$ et $\Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions

★ Si $\Delta=0$ et $(\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0)$, alors le système (S) n'admet pas de solutions et $S=\varnothing$

Exemples

Résoudre les systèmes suivants avec la méthode des déterminants :

$(S_1):\begin{cases}2x-3y=5\\ 4x+2y=1\end{cases}$; $(S_2):\begin{cases}3x-4y=2\\ -6x+8y=-4\end{cases}$; $(S_3):\begin{cases}2x+3y=5\\ 6x+9y=11\end{cases}$

Réponses

- Pour le système (S_1) on a : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=4+12=16\neq 0$ donc le système (S_1) admet une seule solution dont $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{16}=\frac{10+3}{16}=\frac{13}{16}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{16}=\frac{2-20}{16}=-\frac{18}{16}=-\frac{9}{8}$

  donc $S=\left\{\left(\frac{13}{16},-\frac{9}{8}\right)\right\}$

- Pour le système (S_2) on a : $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -6 & 8\end{vmatrix}=24-24=0$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$ et

  $\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -6 & -4\end{vmatrix}=-12+12=0$ donc $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$. Donc le système (S_2) admet une infinité de solutions déterminons l'ensemble des solutions de (S_2).

La première équation du système (S_2) est $3x-4y=2 \Leftrightarrow 4y=3x-2 \Leftrightarrow y=\frac{3x-2}{4}$. Alors

$$S=\left\{\left(x,\frac{3x-2}{4}\right)/\ x\in\mathbb{R}\right\}.$$

- Pour le système (S_3), on a $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{vmatrix}=18-18=0$ et $\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 11 & 9\end{vmatrix}=45-33=12\neq 0$. Donc le système (S_3) n'admet pas de solutions d'où $S=\varnothing$.

3 – Régionnement du plan

Proposition

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère la droite (D) d'équation $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$.

La droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts :

★ L'un des deux demi-plans est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $ax+by+c>0$

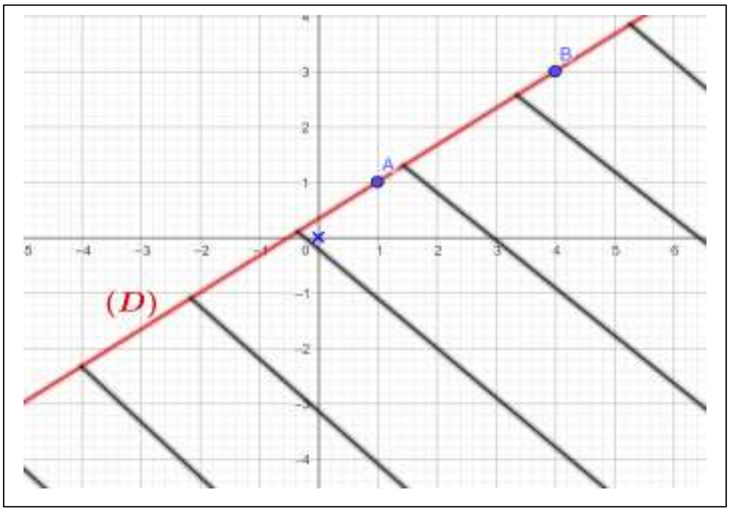
★ L'autre demi-plan est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $ax+by+c<0$

Exemples

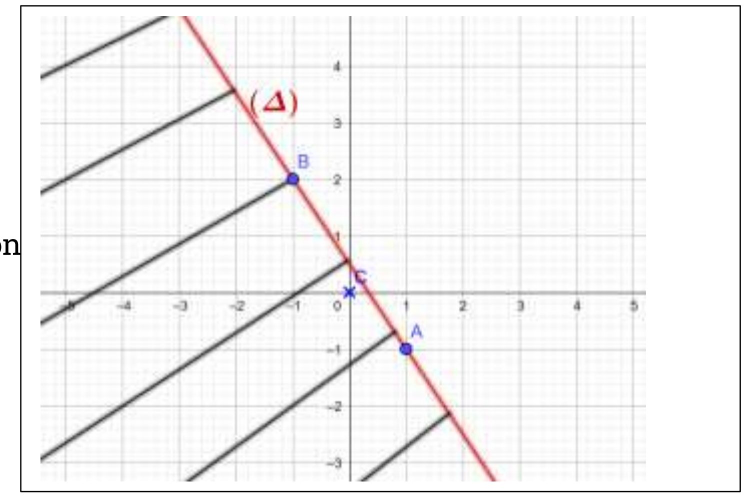
Résoudre graphiquement les inéquations du premier degré à deux inconnues x et y :

$2x-3y+1>0$; $3x+2y-1<0$

- On considère la droite (D) d'équation $2x-3y+1=0$. La droite (D) passe par les points $A(1,1)$ *et* $B(4,3)$
  En remplaçant x et y par 0, on obtient +1 donc l'origine du repère $O(0,0)$
  Est dans le demi-plan qui est solution
  De cette inéquation. Alors l'ensemble
  Des solutions de cette inéquation est
  Le demi-plan hachuré dans la figure
  ci-contre



- On considère la droite (Δ) d'équation $3x+2y-1=0$. La droite (Δ) passe Par les points $E(1,-1)$ *et* $F(-1,2)$
  L'ensemble de solutions de cette inéquation
  Est le demi-plan hachuré dans la figure
  ci-contre (qui contient l'origine du repère)



Exercice

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y-2>0 \\ 2x-y-1<0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x+2y-5<0 \\ 4x-3y-1>0 \end{cases}$$

III – Equations et inéquations du second degré

1 – Equation du second degré

Définition

- Une équation du second degré à une inconnue est équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où x est l'inconnue et a, b et c sont des nombres donnés tels que $a \neq 0$.
- Le polynôme du second degré ax^2+bx+c s'appelle un trinôme
- Résoudre une équation du second degré consiste à déterminer toutes les valeurs de l'inconnue x qui vérifient cette équation.
- L'ensemble de toutes les valeurs de x qui vérifient une équation du second degré est appelé l'ensemble de solutions de cette équation et est noté habituellement par S.
- Le discriminant de l'équation du second degré $(E):\ ax^2+bx+c=0$ est le nombre réel $\Delta = b^2-4ac$

Proposition

On considère une équation du second degré $(E):\ ax^2+bx+c=0$ telle que $a \neq 0$, et S l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}$ et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Et on a : $S = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Et on a : $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$

Remarque

Pour résoudre une équation du second degré on peut utiliser l'une des techniques suivantes :

- La factorisation lorsque cela est simple
- L'utilisation du discriminent si la factorisation n'est accessible.

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$(E_1):\ x^2-4x-5=0 \quad ; \quad (E_2):\ 3x^2+5x+11=0 \quad ; \quad (E_3):\ x^2-2\sqrt{5}\,x+5=0$$

Réponses

- Pour l'équation (E_1) on a $a=1,\ b=-4\ et\ c=-5$

  Donc $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times1\times(-5) = 16+20 = 36$. Alors $\Delta > 0$ donc l'équation (E_1)

admet deux solutions distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{36}}{2}=\frac{4-6}{2}=-1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+\sqrt{36}}{2}=\frac{4+6}{2}=5$. D'où $S=\{-1,5\}$

- Pour l'équation (E_2) on a $a=3, b=5 \ et \ c=11$
  Donc $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times3\times11=25-132=-107$. Alors $\Delta<0$ donc l'équation (E_2) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc $S=\varnothing$.
- Pour l'équation (E_3) on a $a=1, b=-2\sqrt{5} \ et \ c=5$
  Donc $\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{5}\right)^2-4\times1\times5=20-20=0$. Alors $\Delta=0$ donc l'équation (E_3) admet une solution double $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$. D'où $S=\left\{\sqrt{5}\right\}$.

2 – Factorisation et signe d'un trinôme

a – Factorisation f'un trinôme

Proposition

On considère un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq0$ et Δ son discriminant.

★ Si $\Delta>0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes $x_1 \ et \ x_2$ et on a :
$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

★ Si $\Delta=0$, alors l'équation (E) admet une solution double x_0 et on a : $P(x)=a(x-x_0)^2$

★ Si $\Delta<0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ et le trinôme $P(x)$ ne peut pas être factorisé.

Exemples

Factoriser les trinômes suivants :

- $f(x)=2x^2-x-3$
- $g(x)=9x^2+6x+1$
- $h(x)=3x^2+5x+4$

b – Signe d' un trinôme

Proposition

On considère un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq0$ et Δ son discriminant.

★ Si $\Delta<0$, alors le trinôme $P(x)$ a le même signe que a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

★ Si $\Delta=0$, alors le trinôme $P(x)$ a le même signe que a sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

★ Si $\Delta>0$ et x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme tels que $x_1<x_2$, alors :
$P(x)$ a le même signe que a sur $]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[$ et $P(x)$ a le même signe que $(-a)$ sur $]x_1,x_2[$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		Signe de a	0	signe de $(-a)$	0	Signe de a	

Exemples

1) Etudier le signe des trinômes suivants :

$f(x)=2x^2+x-6$; $g(x)=4x^2+20x+25$; $h(x)=-3x^2+x+1$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1):-2x^2+5x+3\geq 0$; $(I_2):9x^2-12x+4>0$; $(I_3):5x^2+3x+2\leq 0$; $(I_4):3x^2+x-2<0$

c – Inéquations du second degré

Proposition

- ★ Soient a, b et c tels que $a\neq 0$.
  Toute inégalité de la forme : $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ ou $ax^2+bx+c<0$ est appelée une inéquation du second degré d'inconnue x
- ★ Résoudre une inéquation consiste à déterminer toutes les valeurs de x qui vérifient cette inéquation
- ★ L'ensemble de tous les x qui vérifient cette inéquation est appelé l'ensemble des solutions de cette inéquation et est noté habituellement S.

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1):6x^2+13x+7>-4x^2+2x+13$; $(I_2):(-x^2+5x-6)(4x^2-12x+9)<0$

3 – Somme et produit des racines d'un trinôme

a – Somme et produit des racines d'un trinôme

Proposition

On considère un trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$ tel que $\Delta>0$. Alors les racines x_1 et x_2 de ce trinôme vérifient les assertions suivantes :

- ★ $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- ★ $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

Exemples

1) On considère l' équation $(E): x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).

b) Déduire la deuxième solution.

2) Déterminer la somme et le produit des racines des trinômes suivants :

a) $P(x)=x^2-(5+\sqrt{3})x+5\sqrt{3}$

b) $Q(x)=-2x^2+x+\sqrt{3}$

b – Détermination de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Proposition

Soit S et P deux nombres réels , alors :

Le système $(S):\begin{cases}u+v=\mathrm{S}\\ u\times v=\mathrm{P}\end{cases}$ admet des solutions si et seulement si $\mathrm{S}^2-4\mathrm{P}\geq 0$.

Dans ce cas les solutions u et v sont les solutions de l'équation du second degré $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$.

<u>Remarque</u>

Pour déterminer les valeurs de u et v telles que $\begin{cases} u + v = \mathrm{S} \\ u \times v = \mathrm{P} \end{cases}$ il suffit de résoudre l'équation du second degré $x^2 - \mathrm{S}x + \mathrm{P} = 0$.

<u>Exemples</u>

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S): \begin{cases} u + v = 5 \\ u \times v = -6 \end{cases}$

2) a) Résoudre l'équation $t^2 - 13t + 12 = 0$

b) En déduire les solutions du système $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{xy} = 12 \end{cases}$