I – Primitives d'une fonction sur un interv alle

1 – Définition

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

On dit que F est une fonction primitive de f si et seulement si :

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I),\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

2 - Propriétés

Proposition 1

Toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une fonction primitive sur cet intervalle

Proposition 2

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I. Alors :

- Les fonctions $G_k : x \mapsto F(x) + k$ sont des primitives de f sur I, pour tout réel k
- En particulier, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive H de f sur I telle que : $H(x_0) = y_0$

Proposition 3

Soit F une primitive de f sur un intervalle I.

Une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement si :

$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in I);\ G(x) = F(x) + k$

II – Tableaux des primitives des fonctions usuelles

1 – Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
a ($a =$ constante)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{1}{2x^2} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0,+\infty[$

2 – Opérations sur les primitives

f	F
$u+v$	$U+V+c$
αu	$\alpha U+c$
$u'u^n \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$
$\frac{u'}{u^n} \ (n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$
$u'e^u$	e^u+c

III – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1 – Intégrale et primitive

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit a et b deux nombres réels de I et soit F une primitive de f sur I.

Le nombre $\mathbf{F(b)-F(a)}$ est appelé « **l'intégrale de la fonction** f **de** a à b » et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Remarques

- ❈ $\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi : « La somme de **e** $f(x)$ de a à b »
- ❈ Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, la lettre x peut être remplacée par une autre lettre sans que le résultat change. Et on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \ldots$

Exemple

1) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=x^3+x^2+x+5$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=3x^2+2x+1$.

2) Calculer l'intégrale $I=\int_1^{\sqrt{3}}(3x^2+2x+1)dx$

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, pour tous les réels a, b et c de I on a :

- ★ $\int_a^a f(x)dx = 0$
- ★ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

★ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ (Cette propriété s'appelle **relation de Chasles**)

Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ ; \ x\geq 1 \\ f(x)=e^{x-1} \ ; \ x\leq 1 \end{cases}$

a) Vérifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\int_0^2 f(x)dx$

Proposition (Linéarité des intégrales)

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I. Alors pour tous les réels a et b de I et tout k de $\mathbb{R}$, on a :

★ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

★ $\int_a^b [k\times f(x)]dx=k\times\int_a^b f(x)dx$

Autrement dit : $\left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right) ; \int_a^b [\alpha\times f(x)+\beta\times g(x)]dx=\alpha\times\int_a^b f(x)dx+\beta\times\int_a^b g(x)dx$

(Cette formule est appelée « **formule de la linéarité des intégrales** »)

Exemple

Calculer les intégrales suivantes : $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(x^2+x\right)dx$; $I_2=\int_2^3\left(e^x+\dfrac{1}{x-1}\right)dx$; $I_3=\int_0^1 \dfrac{5}{x+1}dx$.

Remarque

Soit f une fonction dérivable sur le segment $[a,b]$. Alors : $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$

2 – Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Proposition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a\in I$.

La fonction φ définie sur l'intervalle I par : $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I, qui S'annule en a.

Remarque

- La fonction φ définie sur l'intervalle I par : $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$, est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(\forall x\in I) ; \varphi'(x)=f(x)$
- $(\forall x_0\in I) ; \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)=f(x_0)$

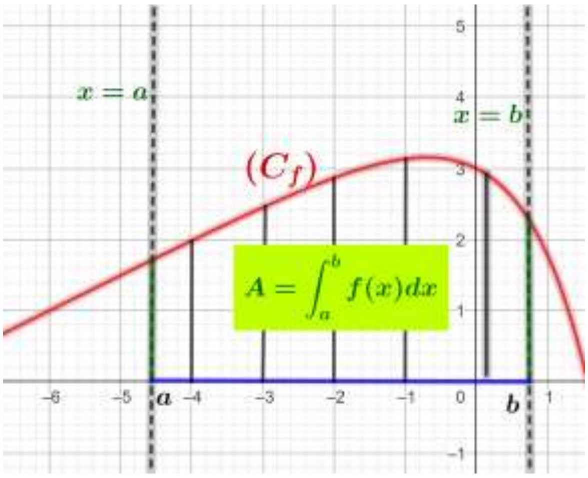
3 – Interprétation géométrique d'une intégrale

Proposition

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine plan délimité par la courbe $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \ \left(\text{exprimée en unités d'aire}\right)$$



II – Techniques de calcul des intégrales

1 – Utilisation des primitives

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors :

$$\left(\forall (a,b)\in I^2\right) ; \ \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque

- Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$, alors : $\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$.
- Lorsqu'on peut déterminer une primitive d'une fonction alors l'intégrale se calcule facilement

Exemple

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1\left(2x^2+x-5\right)dx \ ; \ I_2=\int_1^2\frac{8}{x+5}dx \ ; \ I_3=\int_0^1 x^{\frac{5}{3}}\,dx \ ; \ I_4=\int_0^1 6e^x\,dx \ ; I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-3\sin x\right)dx$$

2 – Intégration par parties

Proposition

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I. Alors :

$$\begin{cases} u \text{ et } v \text{ sont dérivables sur } I \\ u' \text{ et } v' \text{ sont cotinues sur } I \end{cases} \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Remarque

- Pour savoir utiliser la technique de l'intégration par parties, il faut savoir écrire la fonction qu'on veut intégrer sous forme d'un produit d'une fonction et de la dérivée d'une autre fonction.
- Pour faire cette décomposition on utilise **ALPES** où :
  - **A** désigne arctangente
  - **L** désigne logarithme
  - **P** désigne polynôme
  - **E** désigne exponentielle

- $\mathbf{S}$ désigne sinus et cosinus

Exemple

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_1^e \ln x\,dx \quad ; \quad J_2 = \int_0^1 xe^x\,dx \quad ; \quad J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,dx \quad ; \quad J_5 = \int_0^1 \arctan x\,dx$$

III – Intégrale et ordre

1 – Positivité et croissance

Proposition 1

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

$$Si \begin{cases} (\forall x \in [a,b]) \ ; \ f(x) \geq 0 \\ a < b \end{cases} \ , alors \ \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Preuve

Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors elle admet une primitive F sur $[a,b]$, d'où

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ et $(\forall x \in [a,b])\ ;\ F'(x) = f(x)$.

Comme $(\forall x \in [a,b])\ ;\ f(x) \geq 0$ alors $(\forall x \in [a,b])\ ;\ F'(x) \geq 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$

Comme $a < b$ alors $F(a) \leq F(b)$ par suite $F(b) - F(a) \geq 0$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

$$Si \begin{cases} (\forall x \in [a,b]) \ ; \ f(x) \geq g(x) \\ a < b \end{cases} \ , \text{alors} \ \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Exemples

- Montrer que : $(\forall x \in [1,+\infty[)\ ;\ 0 \leq \int_1^x \frac{dt}{t} \leq x - 1$. $(i.e\ 0 \leq \ln x \leq x - 1)$
- Montrer que : $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{\pi}{2} - 1$

2 – Intégrale et valeur absolue

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors :

$$(\forall (a,b) \in I^2) : a \leq b \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Preuve

Soient a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a \leq b$, donc f est continue sur le segment $[a,b]$ ainsi que les fonctions $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto -|f(x)|$

Puisque $(\forall x \in [a,b])\ ;\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ alors $\int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

D'où $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$; alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

3 – Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leq b$.

- ★ S'il existe deux réels m et M tels que : $(\forall x \in [a,b])$; $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

- ★ S'il existe un réel positif M tel que : $(\forall x \in [a,b])$; $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$$

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ tel que $a < b$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ est le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque

Si $(\forall x \in [a,b])$; $m \leq f(x) \leq M$ où $a < b$; alors $m \leq \mu \leq M$

Théorème de la moyenne

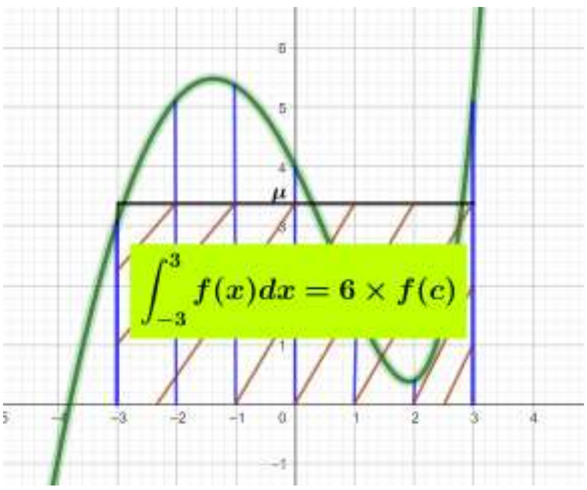
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ tel que $a < b$. Alors :

$$(\exists c \in [a,b]) ; \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

Remarque

On traduit graphiquement le théorème de la moyenne par :

L'aire du domaine plan délimité par la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites D'équations $x = a$ et $x = b$ est égale du rectangle de longueur $(b-a)$ et de largeur l'ordonnée du point moyen de la courbe.



IV – Applications du calcul intégrale

1 – Calcul des aires

Proposition 1

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ tel que $a<b$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

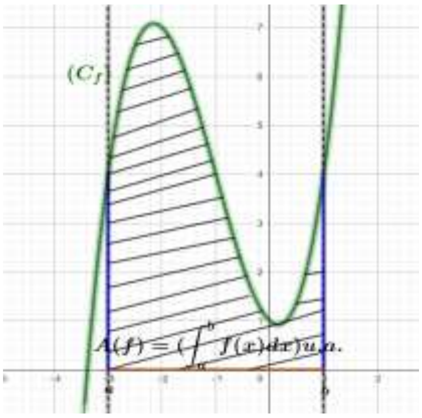
L'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\mathcal{A}(f)=\int_a^b |f(x)|\,dx$ (en unité d'aire : u.a.)

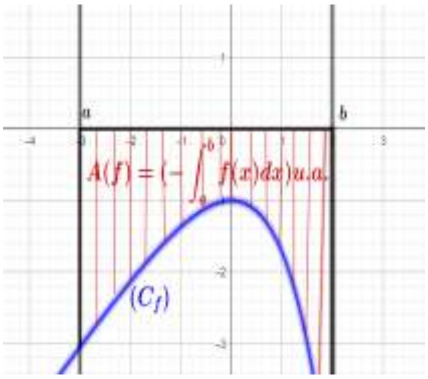
Remarques

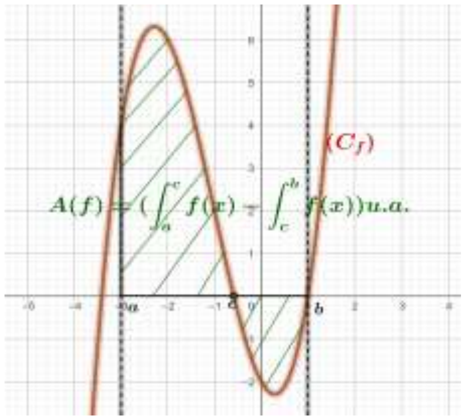
On note par $\mathcal{A}(f)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

- Si $(\forall x\in[a,b])$; $f(x)\geq 0$, alors $\mathcal{A}(f)=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)u.a.$
- Si $(\forall x\in[a,b])$; $f(x)\leq 0$, alors $\mathcal{A}(f)=\left(-\int_a^b f(x)\,dx\right)u.a.$
- Si $(\exists c\in[a,b])$: $(\forall x\in[a,c])$; $f(x)\geq 0$ et $(\forall x\in[c,b])$; $f(x)\leq 0$, alors :

$$\mathcal{A}(f)=\left(\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx\right)u.a.$$





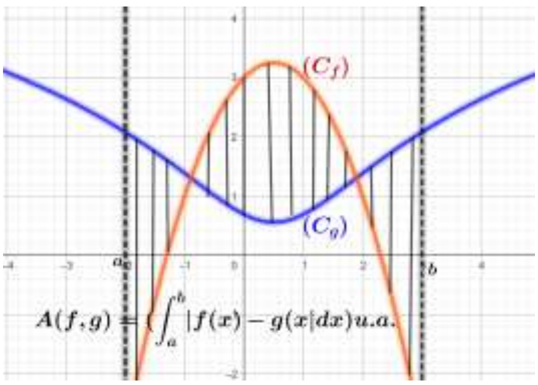


Proposition 2

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un segment $[a,b]$ tel que $a<b$.

Soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\mathcal{A}(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx\right)u.a.$



2 – Calcul des volumes

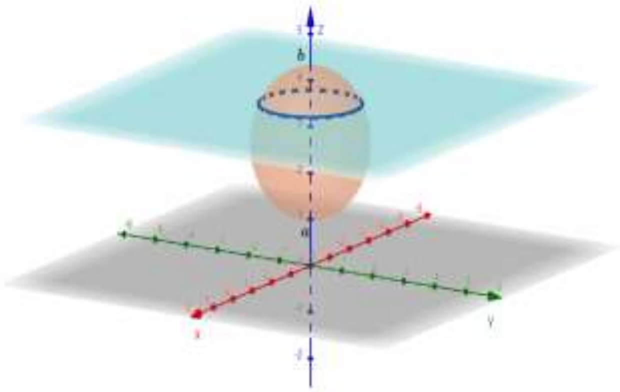
Proposition 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

$\left(S\right)$ est un solide de l'espace limité par deux plans parallèles au plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$:

- Le plan d'équation $z=a$.
- Le plan d'équation $z=b$

Soit $t\in\left[a,b\right]$ et $S(t)$ l'aire de l'intersection du solide $\left(S\right)$ avec le plan d'équation $z=t$. Alors le volume du solide $\left(S\right)$ est égal à : $v\left(S\right)=\left(\int_a^b S(t)\,dt\right)$ (en unité de volume : $u.v.$)



Proposition 2

Soit f une fonction continue sur un segment $\left[a,b\right]$ tel que $a<b$, et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\left(C_f\right)$ autour de l'axe des abscisses un tour Complet est donné par égal à : $V=\pi\times\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx$ (en unités de volume : u.v)