



## I – Fonction exponentielle népérienne

### 1 – Définition

#### Définition :

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée **la fonction exponentielle népérienne** (ou fonction exponentielle) et est notée **exp**

#### Conséquences immédiates:

- La fonction  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- Par définition on a :  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0, +\infty[), y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), \exp(x) > 0$
- $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$  car  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$

### 2 – Propriétés

#### Proposition 1:

- La fonction  $\exp$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $]0, +\infty[$
- La fonction  $\exp$  est continue et dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- Pour tout réel  $x, \ln(\exp(x)) = x$
- Pour tout  $x > 0, \exp(\ln x) = x$

#### Proposition 2:

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0, \exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0$  et  $\exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0$

#### Proposition 3:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall r \in \mathbb{Q}^*$  ; on a :

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = (\exp(x))^{-1}$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

#### Proposition 4:

$\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :  $\exp\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{k=n} \exp(x_k)$

### 3 – Notation puissance de la fonction exponentielle népérienne

Dorénavant, on changera la notation  $\exp$  de la fonction exponentielle comme suit :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \mathbf{\exp(x) = e^x}$$

#### Proposition:

On résume les propriétés énoncées précédemment en utilisant la nouvelle notation :



- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0, +\infty[), y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; e^{x+y} = e^x \times e^y, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}, e^{rx} = (e^x)^r$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$  et  $(e^x < e^y \Leftrightarrow x < y)$

#### 4 – limites importantes:

##### Propriété:

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$	

#### 5 – Dérivée de la fonction exponentielle népérienne:

##### Proposition 1:

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) \text{ ou encore } (e^x)' = e^x$$

##### Proposition 2:

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . La fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$

$$\text{et on a : } (\forall x \in I), (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

##### Proposition 3:

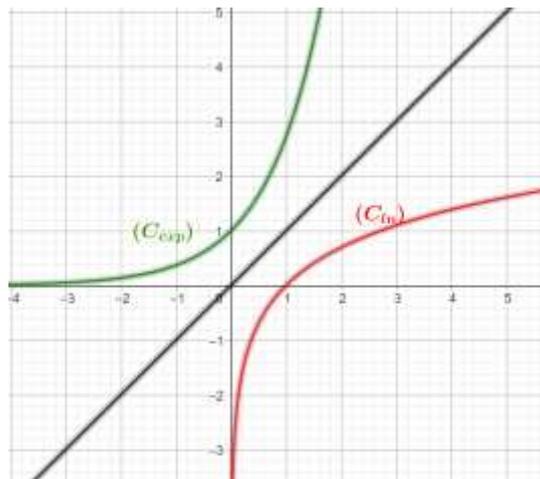
Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Alors les primitives de la fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  sur  $I$  sont les fonctions définies sur  $I$  par  $x \mapsto e^{u(x)} + c$  où  $c$  est une constante réelle

#### 6 – Courbe de la fonction exponentielle:

##### Proposition:

Soit  $(C)$  la courbe représentative de la fonction exponentielle  $x \mapsto e^x$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors :

- La courbe  $(C)$  admet une asymptote horizontale au voisinage de  $-\infty$  d'équation  $y = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- La courbe  $(C)$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  de direction asymptotique l'axe des ordonnées car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- La courbe  $(C)$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Donc elle est au-dessus de toutes ses tangentes



## II – Fonction exponentielle de base a

### 1 – Définition:

#### Définition:

Soit  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ . La fonction exponentielle de base  $a$  est la fonction réciproque de la fonction  $\log_a$  on la note  $\exp_a$

### 2 – Propriétés:

#### Propriétés :

- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in ]0,+\infty[), y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}), \exp_a(x) = e^{x \ln a}$
- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}), \exp_a(x) = a^x$

#### Proposition 1:

$(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall r \in \mathbb{Q}),$  on a :

- $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$
- $\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$

#### Une autre notation de la fonction exponentielle de base a:

D'après les propriétés précédentes, on déduit deux notations de la fonction exponentielle de base a :

$$(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}), \mathbf{\exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x}$$

#### Proposition 2:

Soit  $a$  un réel strictement positif tel que  $a \neq 1$ . On a :

- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in ]0,+\infty[), y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$
- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in \mathbb{R}), \log_a(a^x) = x$
- $(\forall a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[) (\forall x \in ]0,+\infty[), a^{\log_a(x)} = x$

**Proposition 3:**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Alors,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

**3 – Etude de la fonction  $\exp_a$ :****Proposition 1:**

La fonction  $\exp_a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), (\exp_a)'(x) = a^x \times \ln a$$

**Proposition 2:**

- Si  $a > 1$ , la fonction  $x \mapsto a^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ;  
 $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$
- Si  $0 < a < 1$ , la fonction  $x \mapsto a^x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  :  
 $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$

**Proposition 3:**

- Si  $a > 1$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- Si  $0 < a < 1$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

**4 – Exemples de courbes de  $\exp_a$ :**