I – Fonction exponentielle népérienne

1 – Définition

Définition :
La fonction réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée **la fonction exponentielle népérienne** (ou fonction exponentielle) et est notée **exp**

Conséquences immédiates:

- La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$
- Par définition on a : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[),\ y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \exp(x) > 0$
- $\exp(0) = 1,\ \exp(1) = e$ car $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$

2 – Propriétés

Proposition1:

- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$
- La fonction exp est continue et dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$
- Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln x) = x$

Proposition 2:

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, $\exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0$ *et* $\exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Proposition 3:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall r \in \mathbb{Q}^*$; on a :

- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} = (\exp(x))^{-1}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(r\,x) = (\exp(x))^r$

Proposition 4:

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\exp\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{k=n} \exp(x_k)$

3 – Notation puissance de la fonction exponentielle népérienne

Dorénavant, on changera la notation exp de la fonction exponentielle comme suit :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ \mathbf{exp}(x) = \mathbf{e}^x$$

Proposition:
On résume les propriétés énoncées précédemment en utilisant la nouvelle notation :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[),\ y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ e^{x+y} = e^x \times e^y,\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y},\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x},\ e^{rx} = \left(e^x\right)^r$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y\right) et \left(e^x < e^y \Leftrightarrow x < y\right)$

4 – limites importantes:

Propriété:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$	

5 – Dérivée de la fonction exponentielle népérienne:

Proposition 1 :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$ ou encore $\left(e^x\right)' = e^x$

Proposition 2:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $(\forall x \in I),\ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Proposition 3:

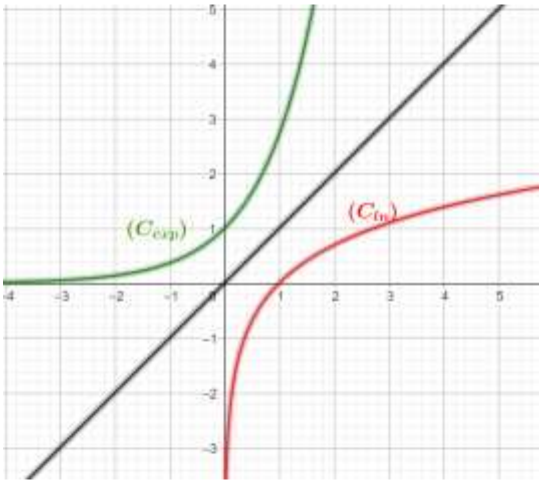
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors les primitives de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto e^{u(x)} + c$ où c est une constante réelle

6 – Courbe de la fonction exponentielle:

Proposition:

Soit (C) la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Alors :

- La courbe (C) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- La courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des ordonnées car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- La courbe (C) est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc elle est au-dessus de toutes ses tangentes



II – Fonction exponentielle de base a

1 – Définition:

Définition:

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$ on la note $\exp_a$

2 – Propriétés:

Propriétés :

- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[),\ y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \exp_a(x) = e^{x\ln a}$
- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \exp_a(x) = a^x$

Proposition 1:

$(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall r \in \mathbb{Q})$, on a :

- $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$
- $\exp_a(r\,x) = (\exp_a(x))^r$

Une autre notation de la fonction exponentielle de base a:

D'après les propriétés précédentes, on déduit deux notations de la fonction exponentielle de base a :

$$(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \mathbf{exp_a(x) = e^{x\ln a} = a^x}$$

Proposition 2:

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$. On a :

- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[),\ y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln y}{\ln a}$
- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \log_a(a^x) = x$
- $(\forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ (\forall x \in]0,+\infty[),\ a^{\log_a(x)} = x$

Proposition 3:

Soit a et b deux réels strictement positifs. Alors, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

- $a^{x+y}=a^x\times a^y$
- $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$
- $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$
- $\left(ab\right)^x=a^x\times b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

3 – Etude de la fonction $\exp_a$:

Proposition 1:

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\ \left(\exp_a\right)'(x)=a^x\times\ln a$$

Proposition 2:

- Si $a>1$, la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
  $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\ x<y\Leftrightarrow a^x<a^y$
- Si $0<a<1$, la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
  $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\ x<y\Leftrightarrow a^x>a^y$

Proposition 3:

- Si $a>1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$
- Si $0<a<1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

4 – Exemples de courbes de $\exp_a$: