Exercice 1

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = -\dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2+a_n}} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 < a_n < 0$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (a_n)

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \geq -\dfrac{1}{2}$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} \geq \dfrac{a_n}{\sqrt{2+a_0}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \geq \dfrac{a_0}{\left(\sqrt{2+a_0}\right)^n}$

Exercice 2

On considère la suite numérique (b_n) définie par : $\begin{cases} b_0 = -5 \\ b_{n+1} = -\dfrac{8+7b_n}{1+2b_n} (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) a) Calculer b_1 et b_2

b) La suite (b_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? justifier les réponses

2) Soit (c_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $c_n = \dfrac{1+2b_n}{2+b_n}$

a) Montrer que (c_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison

b) Déterminer c_n puis b_n en fonction de n

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|2+b_n| \leq \dfrac{2}{n}$

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6+7u_n}{2+u_n} (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > 0$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|u_{n+1} - 6| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 6|$

3) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $|u_n - 6| \leq 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 4

Partie I :

Calculer en fonction de l'entier naturel n les sommes :

$S_1 = 5+8+11+...+(17+6n)$; $S_2 = 2^4 + 2^6 + 2^8 + ... + 2^{2n+6}$

Partie II :

On considère la suite numérique (x_n) définie par : $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = 1+4x_n + \sqrt{1+4x_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n > 0$

b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n \geq 2$

2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \sqrt{1+4x_n}$.

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1}^2 = 4\left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2$

3) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = 1+u_n$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = \dfrac{1}{4}\left(v_n^2 - 2v_n\right)$

c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $x_n = \dfrac{1}{4}\left(2^{2n+4} - 2^{n+3}\right)$.

4) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{1}{3} \times 2^{2n+4} - 2^{n+2} + \frac{2}{3}$