Exercice 1

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x)=\dfrac{x}{x+2}+\ln(x+2)-\ln x$

1/ a/ Montrer que g est définie sur $]0;+\infty[$

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

2/ a/ Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\, g'(x)=-\dfrac{4}{x(x+2)^2}$

b/ Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation

3/ Justifier que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\, g(x)>1$

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\left[\ln(x+2)-\ln x\right];\ si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1/ a/ Etudier la continuité de f à droite de 0

b/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et donner une interprétation graphique de ce résultat.

2/ a/ Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\, f(x)=2\times\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter ce résultat graphiquement

3/ a/ Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,;\, f'(x)=g(x)-1$

b/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

4/ a/ Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

b/ Construire (T) et (C_f) dans le même repère

Partie C :

1/ justifier que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

2/ a/ Calculer $f^{-1}(\ln 3)$ et $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3)$

b/ Construire dans le même repère la courbe (C') représentative de f^{-1}

Exercice 2

I - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) Calculer les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition

2) Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation
3) Montrer que la seule solution de l'équation $g(x)=0$ est $x_0=1$ puis donner le signe de $g(x)$.

II - On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (d'unité graphique : 1 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
3) a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation
4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation : $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$
   b) En déduire que la droite (D) d'équation $y=x$, coupe la courbe (C_f) en deux points dont on déterminera les coordonnées
   c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D)
5) a) Calculer $f'(1)$ et donner une interprétation graphique à ce résultat
   b) Construire la courbe (C_f) et la droite (D).

C- On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$u_0=\sqrt{3}\ et\ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N};1\le u_n\le 2$
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-\frac{2x}{\ln x},\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2/ a/ Calculer les limites de f aux bornes de D.

b/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_f).

3/ a/ Montrer que f est continue en 0 à droite .

b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat .

4/ a/ Montrer que :

$$\left(\forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right);\ f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2}{(\ln x)^2}$$

b/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation .

5/ a/ Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right);\ f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x(\ln x)^3}$

b/ Etudier la concavité de la courbe (C_f).

6/ a/ Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) Au point d'abscisse $x_0 = e$.

b/ Construire dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C_f).