Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > \sqrt{2}$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n - \sqrt{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = 4n - u_n$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4

2) a) Montrer que (u_{2n}) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n.

3) On pose $v_n = u_n + 1 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis en déduire $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n > \dfrac{1}{2}$

3) a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq 1$

4) Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = \dfrac{2}{2u_n - 1}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = \dfrac{2 + v_n}{2v_n}$ et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 4

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $a_0 = \dfrac{3}{2}$ et $a_{n+1} = \dfrac{2}{3 - a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer a_1 et a_2

b) La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 < a_n < 2$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3 - a_n}$

b) En déduire la monotonie de la suite (a_n)

4) Soit (b_n) la suite définie par : $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (b_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Déterminer b_n en fonction de n

c) en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ a_n = 2 \times \dfrac{1 + 2^{n-1}}{1 + 2^n}$

Exercice 5

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM Smail El jaâfari

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n} u_n$

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont il faut donner sa raison et son premier terme

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

3) a) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(n+1)^2 = n^2\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 4$, on a : $n^2 \leq 2^n$

Exercice 6

On considère (x_n) la suite numérique définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 3}{x_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = 5 - \dfrac{12}{x_n + 3}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq x_n < 3$

c) Etudier le sens de variation de la suite (x_n)

2) Soit (y_n), la suite numérique définie par : $y_n = \dfrac{x_n - 3}{x_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $\left(y_n\right)$ est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$

b) Exprimer y_n puis x_n en fonction de

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari