Exercice 1

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1+(2-x)e^{-x}$.

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g'(x)=(x-3)e^{-x}$.

2) Etudier la monotonie de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

3) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)>0$.

Partie II :

On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$.

3) Etudier la convexité de la courbe (C_f) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont on Déterminera les coordonnées.

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

5) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au Voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (Δ).

6) a) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α tel que $0<\alpha<1$.

b) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prend $\|\vec{i}\|=1cm$)

7) a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $K=\int_1^{\ln 4}(x-1)e^{-x}\,dx$.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\ln 4$.

8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que L'on déterminera.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en $b=-1$ et que $\left(f^{-1}\right)'(-1)=\dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 (SN2009)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)$

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I – 1) Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et en déduire que l'ensemble de

Définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x} > 0$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter ce résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Etudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ et est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty,0\right]$.

4) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$, $f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x}\right)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.

5) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$.

b) Etudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et celui de $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0,\ln 4\right]\right)$; $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$.

d) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0,\ln 4\right]\right)$; $f(x) \le x$.

6) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite (D) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

II – On considère la suite numérique $\left(u_n\right)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$; $0 \le u_n \le \ln 4$.

2) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

3) Déduire que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (SR2012)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $f(-x) = -f(x)$ et en déduire que Le point O est un centre de symétrie

De la courbe $\left(C_f\right)$.

2) Vérifier que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$.

3) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$ et vérifier que $f'(0) = \dfrac{3}{2}$.

b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $y = \dfrac{3}{2}x$ est une équation de la droite $\left(T\right)$ tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point O.

4) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + 1\right) \right]$ et en déduire que la droite $\left(D\right)$ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de la droite $\left(D\right)$ sur $\mathbb{R}$.

5) Construire les droites $\left(D\right)$ et $\left(T\right)$ et la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

6) a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln\left(e^x + 1\right)$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 1}$ Sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1}\,dx = \ln 4 - \ln 3$.

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_f\right)$, la droite $\left(D\right)$ et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = \ln 2$.

Exercice 4

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + \left(1 - x\right)e^{-x+2}$$

Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Vérifier que $g(2) = 0$.

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$; $g(x) \geq 0$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.

Et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (unité : 1 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y=x-1$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

3) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$.

b) Calculer $f'(2)$ et interpréter le résultat géométriquement.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.

4) En déduire que le point $I(2,3)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

5) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0;0,5[$ tel que $f(\alpha)=0$.

6) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et elle est En-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty,0]$.

7) Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_f) et la droite (D).

Partie III :

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

2) Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(C_{f^{-1}})$ représentative de la fonction f^{-1}.

3) Déterminer la solution unique de l'équation : $f^{-1}(x)+f(x-1)=5$.

Partie IV :

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=xe^{-x+2}$

1) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 2h(x)+h'(x)-h''(x)=3e^{-x+2}$.

2) Déterminer H la fonction primitive de la fonction h qui s'annule en 0.

3) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites D'équations $x=0$ et $x=2$.